

---

А. И. АЛЕКСЕЕВ

# СБОРНИК ЗАДАЧ по КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

---

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе,  
стереотипное



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР  
2008

---

ББК 22.313

А 47

**Алексеев А. И.**

**А 47** Сборник задач по классической электродинамике: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2008. — 320 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

**ISBN 978-5-8114-0854-2**

В книге представлено около 500 задач, которые охватывают все основные разделы теории электромагнитного поля, рассматривающей электромагнитные процессы и движение зарядов в вакууме. Приведенные в ней разнообразные методы решения электродинамических задач помогут освоить технику практических вычислений, характерных для теоретической физики.

Сборник рассчитан прежде всего на студентов физических факультетов университетов и педагогических институтов, а также на студентов инженерно-физических и физико-технических вузов, изучающих электродинамику по общепринятой программе. Задачи повышенной трудности предназначены для студентов, специализирующихся по теоретической физике, и аспирантов. Сборник будет полезен также инженерам и научным работникам, самостоятельно изучающим теорию электромагнитного поля.

**ББК 22.313**

Обложка  
**А. Ю. ЛАПШИН**

*Охраняется законом РФ об авторском праве.  
Воспроизведение всей книги или любой ее части  
запрещается без письменного разрешения издателя.  
Любые попытки нарушения закона  
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2008  
© А. И. Алексеев, наследники, 2008  
© Издательство «Лань»,  
художественное оформление, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                | Задачи    | Ответы<br>и решения |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|---------------------|
| Предисловие . . . . .                                                          | 5         |                     |
| Принятые обозначения . . . . .                                                 | 7         |                     |
| <b>Глава I. Постоянное электрическое поле . .</b>                              | <b>11</b> | <b>143</b>          |
| § 1. Уравнения Максвелла и граничные условия в электростатике . . . . .        | 19        | 143                 |
| § 2. Электростатическая теорема Гаусса . .                                     | 21        | 144                 |
| § 3. Применение общего решения уравнения Пуассона . . . . .                    | 23        | 148                 |
| § 4. Сила и энергия в электростатике . . .                                     | 25        | 151                 |
| § 5. Уравнения Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями . . . . .        | 28        | 153                 |
| § 6. Плотность заряда тел разной конфигурации . . . . .                        | 31        | 168                 |
| § 7. Дипольный момент . . . . .                                                | 34        | 170                 |
| § 8. Тензор квадрупольного момента . . .                                       | 35        | 172                 |
| § 9. Поле на больших расстояниях от заряженной системы . . . . .               | 40        | 176                 |
| § 10. Двойной электрический слой . . . . .                                     | 43        | 178                 |
| <b>Глава II. Постоянное магнитное поле . . .</b>                               | <b>44</b> | <b>180</b>          |
| § 1. Уравнения Максвелла и граничные условия в магнитостатике . . . . .        | 50        | 180                 |
| § 2. Магнитный момент . . . . .                                                | 53        | 183                 |
| § 3. Магнитное поле на больших расстояниях от тока . . . . .                   | 55        | 186                 |
| § 4. Закон Био и Савара . . . . .                                              | 56        | 186                 |
| § 5. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля . . . . .              | 60        | 189                 |
| § 6. Уравнения Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями . . . . .        | 63        | 193                 |
| <b>Глава III. Переменное электромагнитное поле</b>                             | <b>68</b> | <b>202</b>          |
| § 1. Уравнения Максвелла . . . . .                                             | 74        | 202                 |
| § 2. Плотность заряда и тока . . . . .                                         | 75        | 204                 |
| § 3. Магнитный, дипольный и квадрупольный моменты движущихся зарядов . . . . . | 77        | 205                 |
| § 4. Электромагнитные волны . . . . .                                          | 78        | 207                 |
| § 5. Дифракция . . . . .                                                       | 82        | 211                 |

|                                                                                              | Задачи     | Ответы<br>и решения |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------|
| <b>Глава IV. Излучение электромагнитных волн<br/>медленно движущимися зарядами . . . . .</b> | <b>85</b>  | <b>217</b>          |
| § 1. Дипольное излучение . . . . .                                                           | 93         | 217                 |
| § 2. Магнитно-дипольное и квадрупольное из-<br>лучения . . . . .                             | 98         | 225                 |
| § 3. Спектральное разложение излучения . . .                                                 | 105        | 234                 |
| § 4. Угловое распределение излучения . . .                                                   | 110        | 244                 |
| § 5. Поляризация излучаемых волн . . . .                                                     | 113        | 250                 |
| § 6. Рассеяние электромагнитных волн . . .                                                   | 115        | 254                 |
| § 7. Излучение протяженных источников . .                                                    | 116        | 256                 |
| § 8. Задачи, требующие вычисления на ЭВМ                                                     | 119        | 261                 |
| <b>Глава V. Поле релятивистских заряженных<br/>частиц . . . . .</b>                          | <b>123</b> | <b>273</b>          |
| § 1. Преобразование электромагнитного поля                                                   | 135        | 273                 |
| § 2. Излучение быстро движущегося заряда                                                     | 138        | 277                 |
| <b>Приложения . . . . .</b>                                                                  |            | <b>287</b>          |
| 1. Основные формулы векторного анализа . .                                                   |            | 287                 |
| 2. Матрицы и тензоры . . . . .                                                               |            | 292                 |
| 3. $\delta$ -функция . . . . .                                                               |            | 296                 |
| 4. Полиномы Лежандра . . . . .                                                               |            | 300                 |
| 5. Сферические функции . . . . .                                                             |            | 303                 |
| 6. Цилиндрические функции . . . . .                                                          |            | 305                 |
| 7. Тензорное исчисление в псевдоевклидовом<br>пространстве . . . . .                         |            | 308                 |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                                  |            | <b>318</b>          |



---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник содержит задачи по классической электродинамике в вакууме, которые на протяжении многих лет автор использовал на практических занятиях в Московском инженерно-физическом институте, а также предлагал студентам в качестве индивидуальных заданий. Подавляющая часть задач оригинальна. Вместе с тем в сборник включено некоторое число известных типовых задач для иллюстрации применяемой методики. Задачи разнообразны по трудности, однако большинство из них посилено каждому, кто изучил теорию электромагнитного поля.

Многие задачи имеют подробное решение, особенно в тех случаях, когда используются новые идеи и методы по сравнению с предыдущим материалом. Наряду с этим в сборнике по разным разделам курса электродинамики имеется большое число однотипных задач, для которых даны лишь ответы и краткие указания. Такие задачи весьма полезны при составлении контрольных работ и индивидуальных заданий, а также для самоконтроля при изучении электродинамики. Если эти задачи встречаются затруднение, то соответствующая часть курса электродинамики усвоена не достаточно глубоко и требует дополнительной проработки.

Содержание сборника охватывает вопросы электродинамики в вакууме. Наравне с объемной плотностью введены понятия поверхностной и линейной плотности заряда, а также поверхностной плотности тока, что

---

позволило значительно расширить круг рассматриваемых вопросов и дало возможность проиллюстрировать разнообразные методы, которые используются как в электродинамике в вакууме, так и в электродинамике сплошных сред.

Каждой главе предпослано краткое теоретическое введение, а в приложениях собраны необходимые сведения из векторного анализа, тензорного исчисления и о специальных функциях. Приведенные формулы являются справочным материалом, имеющим целью сэкономить время читателя при решении предложенных задач. Указанные сведения позволили также сократить объем сборника при написании решений к отдельным задачам.

Автор очень признателен В. М. Ермаченко и Б. М. Карнакову за прочтение сборника в рукописи и обсуждение отдельных вопросов.

*А. И. Алексеев*

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Везде используется гауссова абсолютная система единиц.

Векторы обозначаются полужирным шрифтом, а модуль вектора — светлым. Разложение вектора  $\mathbf{A}$  по ортам  $\mathbf{i}_x$ ,  $\mathbf{i}_y$  и  $\mathbf{i}_z$  декартовой системы координат записывается двояко:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z = A_1 \mathbf{i}_x + A_2 \mathbf{i}_y + A_3 \mathbf{i}_z.$$

Если векторный или тензорный индекс, обозначенный греческой буквой, в данном выражении повторяется дважды, то по нему предполагается суммирование от 1 до 3. При этом знак  $\Sigma$  суммы опускается. Например,

$$a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Если указанные индексы обозначены латинской буквой, то суммирование проводится от 1 до 4:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4.$$

Интегралы любой кратности обозначаются одним-единственным знаком  $\int$  и различаются лишь обозначением элемента интегрирования:  $dV = dx dy dz = dr$  — элемент объема,  $dS = \mathbf{n} dS$  — элемент поверхности и  $d\mathbf{l} = \boldsymbol{\tau} dl$  — элемент ориентированного контура. Здесь  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности интегрирования, а  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к контуру интегрирования. Знак  $\oint$  означает интеграл по замкнутой поверхности с ортом  $\mathbf{n}$  внешней нормали или по замкнутому ориентированному контуру, направление обхода которого задается ортом  $\boldsymbol{\tau}$ . Пределы интегрирования в определенном интеграле иногда опускаются вовсе. В этом случае интегри-

рование ведется по области, где подынтегральная функция отлична от нуля.

Для разложения Фурье принято обозначение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

или в трехмерном пространстве

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

$$\varphi(\mathbf{k}) = \int \varphi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r}.$$

Функция  $f(t)$ , периодическая с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , разлагается в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega_0 t},$$

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega_0 t} dt.$$

Полная производная по времени часто обозначается точкой, стоящей над функцией  $\frac{dF}{dt} \equiv \dot{F}$ . Производная от функции  $\Phi(x)$  в точке  $x = x_0$  изображается как  $\frac{d\Phi(x_0)}{dx}$ .

Индекс 0 внизу справа от каждого символа (буквы) отмечает постоянную во времени и координатах величину.

Если аргумент функции представлен в виде  $\alpha t$ ,  $\mathbf{k}\mathbf{r}$  или  $\beta r$ , то множители  $\alpha$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\beta$  не зависят от координат и времени.

**A** — векторный потенциал

$c$  — 1) электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме; 2) произвольная постоянная; 3) полуось эллипсоида

**d** — дипольный момент

$D_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора квадрупольного момента  
 $e$  — точечный заряд (заряд частицы)  
 $E$  — напряженность электрического поля  
 $\mathcal{E}$  — 1) энергия; 2) кинетическая энергия нерелятивистской частицы  
 $F$  — сила  
 $g$  — плотность импульса электромагнитного поля  
 $\hbar$  — постоянная Планка  $1,054 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек  
 $H$  — напряженность магнитного поля  
 $i$  — поверхностная плотность тока  
 $I$  — интенсивность излучения  
 $j$  — объемная плотность тока  
 $J$  — сила тока  
 $k$  — 1) волновой вектор; 2) переменный вектор разложения в тройной интеграл Фурье  
 $l$  — линейный размер заряженной системы или области пространства  
 $L$  — 1) контур интегрирования в криволинейном интеграле; 2) длина  
 $m$  — масса  
 $M$  — момент импульса (механический момент)  
 $N$  — момент сил  
 $n$  — 1) орт нормали к поверхности (внешней нормали для замкнутой поверхности); 2) орт радиус-вектора  $r$  точки наблюдения; 3) единичный вектор  
 $p$  — импульс  
 $P$  — полный импульс механической системы  
 $q$  — линейная плотность заряда  
 $Q$  — полный заряд  
 $R$  — радиус окружности, цилиндра или шара  
 $r$  — 1) модуль радиус-вектора  $r$ ; 2) сферическая координата; 3) цилиндрическая координата  
 $S$  — поверхность  
 $s$  — вектор Пойнтинга  
 $t$  — время  
 $T$  — 1) период; 2) кинетическая энергия релятивистской частицы  
 $T_{\alpha\beta}$  — максвелловский тензор натяжений  
 $U$  — потенциальная энергия  
 $v$  — скорость  
 $V$  — объем  
 $W$  — 1) энергия электромагнитного поля; 2) магнитная энергия взаимодействия тока с внешним магнитным полем

---

$\omega$  — плотность энергии электромагнитного поля  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  — компоненты радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в декартовых прямоугольных координатах

$\theta$  — полярный угол сферической системы координат

$\lambda$  — длина волны, деленная на  $2\pi$

$\mu$  — магнитный момент

$\mu$  — приведенная масса

$\rho$  — объемная плотность заряда

$\sigma$  — поверхностная плотность заряда

$\tau$  — 1) орт касательной к поверхности или к ориентированному контуру; 2) плотность дипольного момента двойного электрического слоя

$\varphi$  — скалярный потенциал

$\psi$  — 1) азимутальный угол сферической системы координат; 2) полярный угол цилиндрической системы координат; 3) угол между двумя направлениями

$\omega$  — 1) циклическая частота; 2) угловая скорость вращения

$\Omega$  — 1) телесный угол; 2) циклическая частота

$\nabla$  — оператор набла.

## Г л а в а I

### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Основной величиной, характеризующей электрическое поле в вакууме, является вектор  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  напряженности этого поля. Вектор  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  представляет собой силу, действующую на единичный пробный заряд, помещенный в точку с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

В настоящей главе рассматривается электростатическое поле, созданное неподвижными зарядами. Распределение зарядов в пространстве описывается объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ , на заряженной поверхности — поверхностной плотностью  $\sigma(\mathbf{r})$ , а на заряженном линейном контуре — линейной плотностью  $q(\mathbf{r})$ . Заряженная поверхность рассматривается как предел поверхности конечной толщины, которая неограниченно утончается при условии, что заряд  $\sigma$  на единице поверхности остается неизменным. Аналогично линейный заряженный контур (или просто линейный заряд) является пределом заряженного длинного цилиндра, который бесконечно утончается при условии, что заряд  $q$  на единице длины остается прежним. Формы заряженной поверхности и контура линейного заряда произвольны. Кроме того, в пространстве могут находиться отдельные точечные заряды  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Напряженность постоянного электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (\text{I. 1})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (\text{I. 2})$$

Если заряды сосредоточены в конечной области, то напряженность электростатического поля на больших расстояниях  $r$  от заряженной системы убывает, как  $1/r^2$ , или быстрее. Это утверждение служит дополнительным

условием к уравнениям Максвелла (I.1) и (I.2) при отыскании  $\mathbf{E}$  в неограниченном пространстве.

При переходе через заряженную поверхность нормальная составляющая  $E_n = E_n$  напряженности электрического поля претерпевает скачок

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (\text{I. 3})$$

в то время как тангенциальная составляющая непрерывна

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0. \quad (\text{I. 4})$$

Здесь индексы 1 и 2 отмечают напряженность электрического поля в первой и второй областях, лежащих по разные стороны от заряженной поверхности. Единичный вектор  $\mathbf{n}$  нормали к этой поверхности направлен из первой области во вторую. Соотношения (I.3) и (I.4) являются граничными условиями в электростатике.

В правую часть уравнения Максвелла (I.2) обычно входит кусочно-непрерывная объемная плотность  $\rho$  заряда, а поверхностная плотность  $\sigma$  учитывается в граничных условиях.

Наравне с этим имеется другой подход к решению задачи, который не требует формулировки граничных условий. Поверхностное распределение заряда  $\sigma(\mathbf{r})$  учитывается в объемной плотности  $\rho(\mathbf{r})$  при помощи  $\delta$ -функции, а решение уравнений Максвелла сразу ищется во всем пространстве. С математической стороны такой подход менее удобен, так как правая часть уравнения (I.2) становится сингулярной функцией, обращающейся в бесконечность в точках заряженных поверхностей.

Для напряженности электрического поля выполняется электростатическая теорема Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi Q, \quad (\text{I. 5})$$

где  $Q$  — полный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ . В общем случае этот заряд складывается из объемных, поверхностных, линейных и точечных зарядов.

Наравне с напряженностью  $\mathbf{E}$  постоянное электрическое поле характеризуется также потенциалом  $\varphi$ , который определяется соотношением

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (\text{I. 6})$$



Разность потенциалов между первой и второй точками пространства представляет собой работу, которую необходимо затратить против сил электрического поля, чтобы перенести единичный заряд из второй точки пространства в первую.

Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \quad (I.7)$$

и граничным условиям на поверхности раздела областей

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma, \quad (I.8)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (I.9)$$

Уравнение (I.7) с нулем в правой части называется уравнением Лапласа. Решая уравнения Пуассона и Лапласа, следует принимать во внимание, что потенциал является непрерывной функцией во всех точках пространства, в которых объемная плотность заряда ограничена. Более того, потенциал непрерывен при переходе через заряженную поверхность, если поверхностная плотность заряда в данной точке ограничена. Граничное условие на линейном контуре, заряженном с линейной плотностью  $q$ , записывается при  $r \rightarrow 0$  в виде  $\varphi = -2q \ln r + \text{const}$ , где  $r$  — кратчайшее расстояние от точки наблюдения до рассматриваемого контура. Когда заряды расположены в конечной области пространства, потенциал на бесконечном расстоянии от этих зарядов равен нулю. По найденному потенциалу определяют напряженность электрического поля путем вычисления градиента (I.6).

Напротив, если вектор  $\mathbf{E}$  найден по электростатической теореме Гаусса (I.5) или каким-либо другим путем, то потенциал  $\varphi$  электрического поля определяется из соотношения (I.6), рассматриваемого как дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $\varphi$ .

В задачах электродинамики часто исследуется электрическое поле бесконечно протяженных источников, хотя реальные заряженные системы всегда имеют ограниченные размеры. Получаемые при этом результаты имеют практический интерес, поскольку поле бесконечно протяженных источников правильно описывает электрическое поле соответствующих ограниченных заряженных систем на расстояниях, малых по сравнению с линейными размерами этих реальных систем. Например,

электрическое поле бесконечного заряженного цилиндра с большой точностью совпадает с полем аналогичного цилиндра достаточно большой, но конечной длины, если только точка наблюдения расположена на расстоянии от этого цилиндра, малом по сравнению с его длиной. Различие между указанными полями наблюдается вблизи торцов цилиндра, а также на расстояниях от него, сравнимых с его длиной.

Потенциал и напряженность электростатического поля точечного заряда  $e$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{I. 10})$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиусы-векторы соответственно точки наблюдения и точки расположения заряда (закон Кулона).

В электростатике справедлив принцип суперпозиции: электростатическое поле системы нескольких зарядов представляет собой наложение (сумму) полей, созданных каждым зарядом в отдельности. Другими словами, заряд в присутствии других заряженных систем создает такое же поле, как и в пустоте.

Если заряды распределены с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r}')$ , то согласно закону Кулона для элементарного точечного заряда  $\rho(\mathbf{r}')dV'$  и принципу суперпозиции потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  и напряженность  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  электрического поля в точке наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  можно представить в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{I. 11})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{I. 12})$$

Потенциал (I. 11) удовлетворяет уравнению Пуассона (I. 7) и является его общим решением в неограниченном пространстве, если объемный интеграл сходится. При этом граничные условия (I. 8) и (I. 9) на поверхности раздела зарядов и вакуума выполняются автоматически. Если интеграл (I. 11) расходится или его не удастся вычислить аналитически, то потенциал электростатического поля находят путем решения уравнения Пуассона (I. 7) с учетом граничных условий (I. 8) и (I. 9).

Иногда вместо объемных зарядов в пространстве имеются заряженные поверхности и линейные контуры. В этом случае потенциал вычисляется по формуле

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int \frac{q(\mathbf{r}') dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{I. 13})$$

а напряженность электрического поля определяется согласно соотношению (I. 6).

Непосредственное вычисление интегралов (I. 11) и (I. 13), как правило, весьма затруднительно. В связи с этим для определения электростатического поля на больших расстояниях от заряженной системы разработан метод вычисления этих интегралов с любой степенью точности. Он состоит в разложении функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

в ряд по малому параметру  $\frac{x'_\alpha}{r}$ , где радиус-векторы  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  берутся в системе координат, начало которой расположено внутри заряженной системы, имеющей максимальный линейный размер  $l$ . В результате потенциал на больших расстояниях  $r \gg l$  от заряженной системы представится в виде бесконечного быстро сходящегося ряда

$$\varphi = \frac{Q}{r} + \frac{d\mathbf{r}}{r^3} + \frac{D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{2r^5} + \dots, \quad (\text{I. 14})$$

где для распределения заряда с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$  введены обозначения

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (\text{I. 15})$$

$$\mathbf{d} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (\text{I. 16})$$

$$D_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (\text{I. 17})$$

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{l}_x + x_2 \mathbf{l}_y + x_3 \mathbf{l}_z. \quad (\text{I. 18})$$

Величины (I. 15), (I. 16) и (I. 17) называются соответственно полным зарядом, дипольным моментом и тензором квадрупольного момента заряженной системы. Последние характеризуют степень отклонения от центральной симметрии в распределении заряда системы. У сферически-симметричной заряженной системы величины (I. 16) и (I. 17), как и мультипольные моменты

более высокого порядка, равны нулю, а потенциал в наружных точках является кулоновским  $\varphi = Q/r$ .

Если заряды распределены по поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то полный заряд, дипольный момент и тензор квадрупольного момента выражаются соответственно через интегралы (I.15) — (I.17), в которых произведена замена  $\rho dV \rightarrow \sigma dS$ , а интегрирование проводится по заряженной поверхности. Аналогично для линейного контура, заряженного с линейной плотностью  $q$ , в интегралах (I.15) — (I.17) совершается замена  $\rho dV \rightarrow q dl$ , а интегрирование проводится по заряженному контуру.

В случае зарядов  $e_i$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), объемная плотность заряда выражается через  $\delta$ -функцию:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (\text{I. 19})$$

а величины (I.16) и (I.17) принимают вид

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i, \quad (\text{I. 20})$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}). \quad (\text{I. 21})$$

Для однородно заряженного тела вращения тензор квадрупольного момента имеет наиболее простой вид в декартовой системе координат, одна из осей которой совпадает с осью аксиальной симметрии. В этом случае отличны от нуля только диагональные компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$ . Например, если ось  $Z$  выбрана вдоль оси симметрии тела вращения, то отличные от нуля компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  равны

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{2} D_{33}. \quad (\text{I. 22})$$

Величину  $D_{33} \equiv D$  называют квадрупольным моментом тела вращения.

По аналогии со случаем точечных зарядов (I.19), имеется возможность при помощи  $\delta$ -функции ввести понятие объемной плотности  $\rho$  также в том случае, когда задано поверхностное или линейное распределение заряда. После этого можно использовать формулы, полу-

ченные ранее для пространственного распределения заряда с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$ .

Система двух бесконечно близко расположенных параллельных поверхностей, у которых поверхностная плотность заряда на противолежащих участках одинакова по абсолютной величине, но противоположна по знаку, называется двойным электрическим слоем. Он характеризуется плотностью дипольного момента  $\boldsymbol{\tau}$ . В каждой точке поверхности двойного слоя вектор  $\boldsymbol{\tau}$  параллелен нормали  $\mathbf{n}$  и направлен от отрицательной стороны к положительной. При неограниченном сближении противоположно заряженных параллельных поверхностей поверхностная плотность заряда на противолежащих участках возрастает по абсолютной величине так, что плотность дипольного момента  $\boldsymbol{\tau}$  принимает конечное значение. Элемент  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  поверхности двойного электрического слоя имеет электрический дипольный момент  $d\mathbf{d} = \boldsymbol{\tau} dS = \boldsymbol{\tau} d\mathbf{S}$ .

Потенциал двойного электрического слоя в точке наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  определяется следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (\text{I. 23})$$

где  $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}')$  — плотность дипольного момента в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$  на поверхности двойного электрического слоя.

Когда плотность дипольного момента по абсолютной величине постоянна, слой называется однородным, и формула (I. 23) упрощается:

$$\varphi = \boldsymbol{\tau} \Omega. \quad (\text{I. 24})$$

Здесь  $\Omega$  — телесный угол, под которым из точки наблюдения видна положительная сторона поверхности двойного электрического слоя. Если видна отрицательная сторона, то в правой части (I. 24) ставится знак минус.

Потенциал и напряженность электрического поля на поверхности двойного электрического слоя удовлетворяют граничным условиям

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau, \quad (\text{I. 25})$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 0, \quad (\text{I. 26})$$

где индексы 1 и 2 отмечают величины, взятые на отрицательной и положительной сторонах поверхности слоя.

Значение потенциала  $\varphi_0(\mathbf{r}')$  в произвольной точке на самой поверхности двойного слоя связано с плотностью  $\tau(\mathbf{r}')$  дипольного момента в этой же точке следующими соотношениями:

$$\varphi_1(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') - 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \quad (\text{I. 27})$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') + 2\pi\tau(\mathbf{r}'), \quad (\text{I. 28})$$

где  $\varphi_1(\mathbf{r}')$  и  $\varphi_2(\mathbf{r}')$  — предельные значения потенциала при приближении к двойному слою соответственно с отрицательной и положительной сторон. Эти значения потенциала входят в граничное условие (I. 25).

Энергия электростатического поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV. \quad (\text{I. 29})$$

Если этот интеграл в неограниченном пространстве сходится, то для вычисления энергии (I. 29) удобно пользоваться равнозначной формулой

$$W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV. \quad (\text{I. 30})$$

Электростатическая энергия взаимодействия двух систем, заряженных с объемными плотностями  $\rho_1(\mathbf{r})$  и  $\rho_2(\mathbf{r}')$ , вычисляется по формуле

$$U = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}) \rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (\text{I. 31})$$

Потенциальная энергия системы зарядов, распределенных с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r})$  во внешнем электрическом поле с потенциалом  $\varphi(\mathbf{r})$ , определяется выражением

$$U = \int \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dV. \quad (\text{I. 32})$$

Если потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  внешнего электрического поля на протяжении заряженной системы меняется незначительно, то выражение (I.32) заменяют быстро сходящимся рядом

$$U = Q\varphi(\mathbf{R}) - \mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \dots \quad (\text{I. 33})$$

Здесь потенциал и напряженность внешнего электрического поля, а также производные от потенциала берутся в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ , лежащей внутри рас-

смаатриваемой заряженной системы. Эта внутренняя точка служит началом декартовой системы координат, в которой определены величины  $\mathbf{d}$  и  $D_{\alpha\beta}$ .

Сила  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к заряженной системе во внешнем электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , равны

$$\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} dV, \quad (1.34)$$

$$\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \rho dV. \quad (1.35)$$

В частном случае диполя с моментом  $\mathbf{d}$  соотношения (1.34) и (1.35) принимают вид

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \text{ grad}) \mathbf{E} = \text{grad} (\mathbf{d} \mathbf{E}), \quad (1.36)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{d} \times \mathbf{E}. \quad (1.37)$$

При помощи максвелловского тензора натяжений

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( E_{\alpha} E_{\beta} - \frac{1}{2} E^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (1.38)$$

электростатическую объемную силу (1.34) можно заменить системой поверхностных сил, приложенных к поверхности объема  $V$ , внутри которого распределен заряд с объемной плотностью  $\rho$ . Тогда компонента  $F_{\alpha}$  суммарной силы (1.34) запишется в виде

$$F_{\alpha} = \int_V \rho E_{\alpha} dV = \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\beta} dS, \quad (1.39)$$

где  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали к замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ . (Подробнее см., например, в книгах [1 — 3]. Необходимые сведения и задачи по электродинамике сплошных сред можно найти в книгах [4 — 6].)

## § 1. Уравнения Максвелла

и граничные условия в электростатике

1. Найти напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля, потенциал  $\phi$  которого равен: а)  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{r})$ ; б)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$ ; в)  $(\mathbf{ar}) \cos kr$ ; г)  $\mathbf{dr}/r^3$ ; д)  $f(r)F(r)$ ; е)  $F(f(\mathbf{ar}))$ . Здесь векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{d}$  не зависят от координат и времени, а  $f$  и  $F$  — произвольные дифференцируемые функции своего аргумента.

2. Можно ли создать в пространстве электростатическое поле с напряженностью  $\mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор?

3. Можно ли подобрать такое распределение заряда снаружи поллой области, чтобы внутри нее напряженность  $\mathbf{E}$  электростатического поля имела вид: а)  $\mathbf{E}_0$ ; б)  $(\mathbf{br})\mathbf{a}$ ; в)  $(\mathbf{ab})\mathbf{r}$ ; г)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r})$ ; д)  $(\mathbf{ar})(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$ ; е)  $\mathbf{r} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r})$ ; ж)  $\mathbf{a}(\mathbf{br}) \cos \mathbf{kr}$ ; з)  $E_r \mathbf{l}_r + E_\theta \mathbf{l}_\theta + E_\psi \mathbf{l}_\psi$ , где компоненты вектора  $\mathbf{E}$  в сферических координатах  $E_r = \frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{b}) R^4}{r^4} \times (3 \cos^2 \theta - 1)$ ,  $E_\theta = \frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{b}) R^4}{r^4} \sin 2\theta$  и  $E_\psi = 0$  при  $r > R$ ; и)  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{l}_r + E_\psi \mathbf{l}_\psi + E_z \mathbf{l}_z$ , где компоненты вектора  $\mathbf{E}$  в цилиндрических координатах  $E_r = (\mathbf{E}_0 \mathbf{b}) \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \psi$ ,  $E_\psi = (\mathbf{E}_0 \mathbf{b}) \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) \sin \psi$  и  $E_z = 0$  при  $r > R$ ? Здесь векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_0$  не зависят от координат.

4. Определить распределение объемной плотности  $\rho$  заряда, создавшего в пространстве электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , равной: а)  $(\mathbf{br})\mathbf{b}$ ; б)  $gr\mathbf{r}$ ; в)  $\frac{er}{r^3} \left\{1 - \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right\}$ ; г)  $E_r \mathbf{l}_r + E_\theta \mathbf{l}_\theta + E_\psi \mathbf{l}_\psi$ , где компоненты  $\mathbf{E}$  в сферических координатах  $E_r = 2\pi\rho_0 \left(r - \frac{2}{3}R\right) \cos \theta$ ,  $E_\theta = \pi\rho_0 \left(\frac{4}{3}R - r\right) \sin \theta$ ,  $E_\psi = 0$  при  $r \leq R$  и  $E_r = \frac{2\pi}{3} \rho_0 R^4 \frac{\cos \theta}{r^3}$ ,  $E_\theta = \frac{\pi}{3} \rho_0 R^4 \frac{\sin \theta}{r^3}$ ,  $E_\psi = 0$  при  $r \geq R$ ; д)  $E_r \mathbf{l}_r + E_\psi \mathbf{l}_\psi + E_z \mathbf{l}_z$ , где компоненты вектора  $\mathbf{E}$  в цилиндрических координатах  $E_r = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \times (2r - R) \cos \psi$ ,  $E_\psi = \frac{4\pi}{3} \rho_0 (R - r) \sin \psi$ ,  $E_z = 0$  при  $r \leq R$  и  $E_r = \frac{2\pi}{3} \rho_0 R \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \psi$ ,  $E_\psi = \frac{2\pi}{3} \rho_0 R \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) \sin \psi$ ,  $E_z = 0$  при  $r \geq R$ . Здесь величины  $a$ ,  $g$ ,  $R$ ,  $\rho_0$ ,  $e$  и вектор  $\mathbf{b}$  не зависят от координат.

5. Вычисляя ротор и дивергенцию напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля, необходимо убедиться в том, что в случае электростатики выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла. Здесь  $\rho(\mathbf{r}')$  — объемная плотность заряда в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ .



6. Напряженность электрического поля однородна внутри некоторой области пространства. Содержат ли внутренние точки этой области какие-нибудь заряды, участвующие в создании данного электрического поля?

7. Доказать, что в электростатике интеграл  $\int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , взятый между двумя произвольными точками пространства, не зависит от формы контура интегрирования?

8. Определить распределение поверхностной плотности  $\sigma$  заряда в пространстве, если напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля имеет вид: а)  $E_x = E_y = 0$ ,  $E_z = E_0$  при  $z > 0$  и  $E_x = E_y = 0$ ,  $E_z = -E_0$  при  $z < 0$ ; б)  $\mathbf{E} = 0$  при  $r < R$  и  $\mathbf{E} = Q\mathbf{r}/r^3$  при  $r > R$ , где  $r$  — расстояние до начала координат, а  $Q$  и  $R$  — постоянные; в)  $\mathbf{E} = 0$  при  $r < R$  и  $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^2$  при  $r > R$ , где  $r$  — расстояние до оси  $Z$ , а  $q$  и  $R$  — постоянные.

## § 2. Электростатическая теорема Гаусса

9. Область пространства однородно заполнена электрическим зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Найти напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\phi$  электрического поля в каждой точке пространства, если указанной заряженной областью является: а) шар радиуса  $R$ ; б) бесконечный цилиндр радиуса  $R$ ; в) неограниченная пластина толщины  $2L$ .

10. Поверхность равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $\phi$  электрического поля в каждой точке пространства, если заряженная поверхность имеет форму: а) сферы радиуса  $R$ ; б) бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$ ; в) плоскости.

11. Шар радиуса  $R$  заряжен сферически-симметрично с объемной плотностью  $\rho = ar^5$ , где  $a$  — постоянная. Чему равен поток  $\Phi$  напряженности электрического поля через круг радиуса  $R$ , плоскость которого в центральной точке касается шара?

12. Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна  $\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ , где  $a$  — боровский радиус, а  $r$  — расстояние до протона, имеющего заряд  $e$ . Определить напряженность  $\mathbf{E}$  элек-

трического поля в атоме водорода. Исследовать  $E$  на малых  $r \ll a$  и больших  $r \gg a$  расстояниях от протона.

13. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заполнено сферически-симметрично зарядом с объемной плотностью  $\rho = \rho(r)$ , где  $r$  — расстояние до общего центра обеих сфер. Найти напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

14. Объемная плотность заряда бесконечного цилиндра имеет осевую симметрию и равна  $\rho = \rho(r)$ . Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри цилиндра. При калибровке  $\varphi$  принять, что потенциал равен нулю на поверхности цилиндра.

15. Неограниченная пластина заряжена симметрично относительно своей средней плоскости  $x = 0$ . Объемная плотность заряда равна  $\rho = \rho(|x|)$ . Найти напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри пластины. При калибровке  $\varphi$  принять, что потенциал равен нулю в точках средней плоскости.

16. Разноименные точечные заряды  $e_1$  и  $e_2$  ( $e_1 > > |e_2|$ ) расположены на оси  $X$  на некотором расстоянии друг от друга. Ось  $X$  направлена от положительного заряда к отрицательному. Под каким углом  $\theta_2$  к оси  $X$  входит в заряд  $e_2$  силовая линия, выходящая из заряда  $e_1$  под углом  $\theta_1$ ? Под каким углом  $\theta_0$  выходит из заряда  $e_1$  первая силовая линия, уходящая в плоскости  $XU$  на бесконечность? Какой угол  $\theta_\infty$  с осью  $X$  образует она на бесконечности?

17. Две бесконечные однородные разноименно заряженные нити протянуты в плоскости  $XZ$  параллельно оси  $Z$ . Линейные плотности заряда на положительной и отрицательной нитях равны соответственно  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1 > |q_2|$ ). Ось  $X$  направлена от положительной нити к отрицательной. Под каким углом  $\psi_1$  к оси  $X$  выходит из положительной нити силовая линия, входящая в отрицательную нить под углом  $\psi_2$ ? Под каким углом  $\psi_0$  к оси  $X$  выходит из положительной нити первая силовая линия, уходящая в плоскости  $XU$  на бесконечность?

18. Заряд  $e_1$  находится на оси  $X$  в точке  $x_1 = l$ . Определить величину заряда  $e_2$ , который необходимо поместить в точку  $x_2 = -\sqrt{3} l$  оси  $X$ , чтобы поток напряженности электрического поля через окружность  $x = 0$ ,  $y^2 + z^2 = l^2$  был равен нулю.

**19.** Напряженность электрического поля в пространстве известна:

$$E = \frac{er}{r^3}(1 + br)\exp(-br),$$

где  $e$  и  $b$  — положительные постоянные, а  $r$  — расстояние до начала координат. Определить распределение объемной плотности  $\rho$  заряда, создавшего это поле. Чему равен полный заряд  $Q$ ?

**20.** Определить напряженность  $E$  и потенциал  $\varphi$  электрического поля двух бесконечных параллельных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью соответственно  $q$  и  $-q$ . Расстояние между нитями равно  $l$ . Исследовать  $E$  и  $\varphi$  на больших расстояниях от нитей. При калибровке  $\varphi$  принять, что потенциал равен нулю на бесконечно большом расстоянии от нитей.

**21.** Три взаимно перпендикулярные плоскости равномерно заряжены с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность  $E$  электрического поля в каждой точке пространства.

**22.** Шаровая полость расположена эксцентрично внутри шара, однородно заряженного по объему с плотностью  $\rho$ . Расстояние между центрами шара и полости равно  $l$ . Определить напряженность  $E$  электрического поля в точках шаровой полости.

**23.** Внутри бесконечного цилиндра, однородно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ , имеется цилиндрическая полость. Расстояние между параллельными осями цилиндра и полости равно  $l$ . Найти напряженность  $E$  электрического поля внутри полости.

**24.** Равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  неограниченная тонкая пластина разделена на две половины щелью ширины  $a$ . Найти напряженность  $E$  электрического поля на больших расстояниях  $r \gg a$  от щели с учетом членов порядка  $1/r$ .

### § 3. Применение общего решения уравнения Пуассона

**25.** Определить потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля на оси тонкого диска радиуса  $R$ , равномерно заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Убедиться, что на большом расстоянии от диска найденный потенциал совпадает с кулоновским, а при переходе

через поверхность диска напряженность электрического поля удовлетворяет необходимому граничному условию  $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ .

26. Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Его внешняя неограниченная экваториальная плоскость несет заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность  $E$  электрического поля на оси симметрии шара, которая перпендикулярна однородно заряженной внешней экваториальной плоскости.

27. На оси  $X$  между точками  $x_1 = -l$  и  $x_2 = l$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $q$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

28. Цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $2h$  однородно заряжен по объему с плотностью  $\rho$ . Определить потенциал  $\varphi$  электрического поля на оси симметрии внутри и снаружи цилиндра. Убедиться, что снаружи цилиндра найденное выражение в пределе  $R \rightarrow 0$  и  $\pi\rho R^2 \rightarrow q$  переходит в потенциал электрического поля равномерно заряженного отрезка.

29. Определить потенциал  $\varphi$  электрического поля на оси симметрии следующих равномерно заряженных тел: а) тонкого кольца радиуса  $R$ , заряженного с линейной плотностью  $q$ ; б) цилиндрической поверхности радиуса  $R$  и высоты  $2h$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ ; в) части плоскости, отсекаемой двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) и заряженной с плотностью  $\sigma$ ; г) полусферы радиуса  $R$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ ; д) половины шара радиуса  $R$ , заряженного с объемной плотностью  $\rho$ .

30. Неограниченная плоскость с выступом в виде полусферы радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить потенциал  $\varphi = \varphi(z)$  электрического поля на оси  $Z$ , совпадающей с осью симметрии составной заряженной поверхности. Исследовать  $\varphi(z)$  вблизи точки  $z = 0$  кривизны полусферы ( $|z| \ll R$ ), а также на больших расстояниях от нее ( $|z| \gg R$ ). При калибровке  $\varphi$  принять, что потенциал равен нулю в точке кривизны полусферы:  $\varphi(0) = 0$ .

31. Внутри полусферы радиуса  $R$  распределен заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 e^{ar}$ , где  $\rho_0$  и  $a$  — постоянные, а  $r$  — расстояние до центра кривизны полусферы. Найти напряженность  $E$  электрического поля в центре кривизны полусферы.

32. Шар радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  — полярный угол сферической системы координат. Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри и снаружи шара.

33. Тонкое кольцо радиуса  $R$  равномерно заряжено с линейной плотностью  $q$ . Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства. Убедиться, что в точках на оси кольца найденный потенциал совпадает с выражением, полученным в задаче 29 а).

34. Поверхность равномерно заряженной полусферы радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства. Убедиться, что в точках на оси симметрии полусферы найденный потенциал совпадает с выражением, полученным в задаче 29 г).

35. Однородно заряженный тонкий диск радиуса  $R$  несет заряд  $Q$ . Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям, найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля вдали от диска  $r > R$ , где  $r$  — расстояние до его центра. Показать, что в точках на оси диска найденный потенциал совпадает с выражением, полученным в задаче 25.

36. Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри сферы радиуса  $R$ , одна половина которой равномерно заряжена с объемной плотностью  $\rho$ .

#### § 4. Сила и энергия в электростатике

37. Заряд  $Q$  равномерно распределен по поверхности сферы радиуса  $R$ . Найти абсолютную величину силы  $F$ , разрывающей сферу на две равные половины.

38. Шар радиуса  $R$  однородно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Используя максвелловский тензор натяжений, найти силу  $F$ , разрывающую шар на две равные половины. Подтвердить полученный результат

независимым вычислением с использованием формулы  $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} dV$ , где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля шара.

39. Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Используя максвелловский тензор натяжений, найти силу  $\mathbf{F}$ , разрывающую цилиндр на две одинаковые половины. Здесь  $\mathbf{F}$  — сила, приложенная к единице длины одной из половин цилиндра.

40. Определить энергию  $W$  электростатического поля шара радиуса  $R$ , внутри которого однородно распределен заряд  $Q$ .

41. Определить энергию  $W$  электростатического поля сферы радиуса  $R$ , равномерно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

42. Однородно заряженный шар радиуса  $R_1$  с зарядом  $Q$  расположен эксцентрично внутри другого шара радиуса  $R_2$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ . Заряд большего шара не проникает в меньший. Расстояние между центрами обоих шаров равно  $l$ . Считая заряды шаров одноименными, определить силу  $\mathbf{F}$ , с которой меньший шар выталкивается из большего. Чему равна электростатическая энергия  $U$  взаимодействия шаров, если потенциал электрического поля каждого заряженного шара равен нулю на бесконечности?

43. Однородно заряженный с объемной плотностью  $\rho_1$  бесконечный цилиндр радиуса  $R_1$  расположен внутри другого цилиндра радиуса  $R_2$ , равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho_2$ . Заряд наружного цилиндра не проникает во внутренний. Расстояние между параллельными осями обоих цилиндров равно  $l$ . Чему равна сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к единице длины внутреннего цилиндра? Определить электростатическую энергию  $U = \int \rho_1 \phi_2 dV$  взаимодействия цилиндров, приходящуюся на единицу их длины. Здесь  $\phi_2$  — потенциал зарядов наружного цилиндра. Для однозначности результата принять, что потенциал, созданный зарядами каждого однородного сплошного цилиндра, равен нулю на его поверхности.

44. Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода описывается функцией

$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ , где  $a$  — боровский радиус, а  $r$  — расстояние до протона, имеющего заряд  $e$ . Учитывая вклады от протона и электронного облака, найти распределение потенциала  $\phi$  электрического поля внутри атома. Исследовать  $\phi$  на малых  $r \ll a$  и больших  $r \gg a$  расстояниях от протона. Чему равна электростатическая энергия  $U$  взаимодействия протона с электронным облаком, а также собственная электростатическая энергия  $W$  электронного облака?

45. Часть сферы радиуса  $R$ , видимая из центра кривизны под телесным углом  $\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$ , равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . На оси симметрии (оси вращения) на одинаковом расстоянии от центра кривизны и заряженной поверхности расположен точечный заряд  $e$ . Чему равна электростатическая энергия  $U$  взаимодействия заряда  $e$  с заряженной поверхностью?

46. Найти силу  $F$ , приложенную к заряду  $e$ , находящемуся в вершине конуса высоты  $h$  и радиуса основания  $R$ , если конус однородно заряжен по объему с плотностью  $\rho$ .

47. Коническая поверхность произвольной высоты и радиуса основания  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить работу  $U$ , которую необходимо затратить, чтобы перенести заряд  $e$  из бесконечности в вершину конической поверхности.

48. Шаровой сектор получен пересечением сферы радиуса  $R$  конической поверхностью с вершиной в центре сферы. Заряд  $Q$  однородно заполняет объем шарового сектора. Найти работу  $U$ , которую необходимо затратить, чтобы заряд  $e$  перенести из бесконечности в центр сферы. Изменится ли найденное значение  $U$ , если заряд  $Q$  равномерно распределить по всему объему сферы?

49. В сферических координатах средняя плотность заряда электронного облака возбужденного атома водорода описывается функцией

$$\rho = -\frac{er^4}{3^8\pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

где  $a$  — боровский радиус, а  $r$  — расстояние до протона, имеющего заряд  $e$ . Найти электростатическую энергию  $U$  взаимодействия протона с электронным облаком.

## § 5. Уравнения Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями

50. Плоскость  $XY$  несет заряд с периодической поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos(ax + by)$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в неограниченном пространстве.

51. Поверхностная плотность заряда декартовых плоскостей  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  имеет вид соответственно  $\sigma = \sigma_0 \sin a_1 x \sin b_1 y$ ,  $\sigma = \sigma_0 \sin a_2 x \sin b_2 y$ ,  $\sigma = \sigma_0 \sin a_3 y \sin b_3 z$ , где постоянные величины удовлетворяют условию  $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \lambda$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

52. Пространство заполнено электрическим зарядом с периодической объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \sin l_1 x \sin l_2 y \sin l_3 z$ . Определить потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля в каждой точке пространства.

53. Объемная плотность заряда полупространства  $z \leq 0$  имеет периодическую структуру  $\rho = \rho_0 \cos \mathbf{k} \mathbf{r}$ , где постоянный вектор  $\mathbf{k}$  образует с осью  $Z$  отличный от нуля угол. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

54. Объемная плотность заряда неограниченной пластины толщины  $2a$  имеет периодическую структуру  $\rho = \rho_0 \sin l_1 x \sin l_2 y \sin l_3 z$ , где  $|z| \leq a$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри и снаружи пластины.

55. В сферических координатах объемная плотность заряда внутри шара радиуса  $R$  симметрична относительно оси  $Z$  и имеет вид  $\rho = \rho_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  — полярный угол, а начало координат совпадает с центром шара. Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля во всем пространстве.

56. Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен равномерно по своей длине. Объемная плотность заряда  $\rho = \rho_0 \cos \psi$ , где  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  цилиндрической системы координат совпадает с осью цилиндра. Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля внутри и снаружи цилиндра.

57. Заряд распределен по поверхности сферы радиуса  $R$  с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , где  $\theta$  — полярный угол сферической системы координат, начало которой совпадает с центром сферы. Найти потенциал  $\varphi$



и напряженность  $E$  электрического поля внутри и снаружи сферы.

58. Бесконечная цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \psi$ , где  $\psi$  — полярный угол цилиндрической системы координат с осью  $Z$ , направленной вдоль оси симметрии поверхности. Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля внутри и снаружи цилиндрической поверхности, которая поддерживается при нулевом потенциале.

59. Объемная плотность заряда внутри шара радиуса  $R$  задана  $\rho = a r$ , где  $a$  — постоянный вектор, а  $r$  — радиус-вектор, проведенный из центра шара. Найти напряженность  $E$  электрического поля внутри и снаружи шара.

60. Объемная плотность заряда в сферических координатах описывается функцией

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \quad \text{при } r \geq R,$$

где  $\rho_0$  и  $R$  — постоянные, а  $P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра степени  $n > 1$ . Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в неограниченном пространстве.

61. Объемная плотность заряда в цилиндрических координатах имеет вид

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \geq R,$$

где  $\rho_0$  и  $R$  — постоянные, а целое положительное число  $n$  больше единицы. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

62. Потенциал  $\varphi_n$  бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  задан  $\varphi_n = \varphi_0 \cos n\psi$ , где  $\varphi_0$  — постоянная,  $n$  — целое число,  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью данной цилиндрической поверхности. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства, если внутри и снаружи цилиндрической поверхности заряды отсутствуют. Определить распределение поверхностной плотности  $\sigma$  заряда на цилиндрической поверхности.

63. Потенциал  $\varphi_n$  сферической поверхности радиуса  $R$  задан  $\varphi_n = \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y_{lm}^*(\theta, \psi)]$ , где  $Y_{lm}(\theta, \psi)$  —

сферическая функция, а  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы сферической системы координат, начало которой совпадает с центром сферы. Найти потенциал  $\phi$  электрического поля в каждой точке пространства в предположении, что внутри и снаружи сферической поверхности заряды отсутствуют. Определить распределение поверхностной плотности  $\sigma$  заряда на сферической поверхности.

64. Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в области  $0 \leq x$ , ограниченной тремя плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $y = b$ . Предполагается, что плоскость  $x = 0$  имеет однородный потенциал  $\phi_0$ , а две другие плоскости поддерживаются при нулевом потенциале. Внутри данной области заряды отсутствуют.

65. Определить потенциал  $\phi$  электрического поля внутри бесконечно длинной коробки прямоугольного сечения ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ) при следующих краевых условиях: потенциал двух граней  $x = 0$  и  $y = b$  однороден и равен  $\phi_0$ , а потенциал двух других граней коробки равен нулю. Внутри коробки зарядов нет.

66. Определить потенциал  $\phi$  электрического поля внутри полусферы радиуса  $R$ , если потенциал на ее поверхности имеет постоянное значение  $\phi_0$ , а основание полусферы поддерживается при нулевом потенциале. Внутри полусферы заряды отсутствуют.

67. Неограниченная плоскость имеет выступ в виде полусферы радиуса  $R$ . Потенциал полусферы однороден и равен  $\phi_0$ , а плоскость поддерживается при нулевом потенциале. Определить потенциал  $\phi$  электрического поля в полупространстве над плоскостью с выступом, считая, что в этом полупространстве заряды отсутствуют.

68. Одна половина сферической поверхности радиуса  $R$  имеет постоянный потенциал  $\phi_a$ , а другая — постоянный потенциал  $\phi_b$ . Найти потенциал  $\phi$  электрического поля снаружи сферы, где заряды отсутствуют.

69. Окружность радиуса  $R$  делит плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Внутренняя область имеет однородный потенциал  $\phi_0$ , а внешняя поддерживается при нулевом потенциале. Используя разложение по полиномам Лежандра, определить потенциал  $\phi$  электрического поля в каждой точке полупространства над указанной плоскостью. В рассматриваемой области заряды отсутствуют.

70. Сферическая поверхность радиуса  $R$  состоит из двух равномерно и разноименно заряженных полусфер, поверхностная плотность заряда которых равна  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Ось  $Z$  совпадает с осью симметрии и направлена от отрицательных зарядов к положительным. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля внутри и снаружи сферической поверхности.

71. Потенциал  $\varphi_{\psi}$  бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  имеет вид  $\varphi_{\psi} = \varphi_a$  при  $0 < \psi < \pi$  и  $\varphi_{\psi} = \varphi_b$  при  $\pi < \psi < 2\pi$ , где  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  — постоянные,  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью цилиндрической поверхности. Найти потенциал  $\varphi$  в каждой точке пространства в предположении, что внутри и снаружи цилиндрической поверхности зарядов нет.

72. Поверхностная плотность заряда бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  имеет вид  $\sigma = \sigma_a$  при  $0 < \psi < \pi$  и  $\sigma = \sigma_b$  при  $\pi < \psi < 2\pi$ , где  $\sigma_a$  и  $\sigma_b$  — постоянные,  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью цилиндрической поверхности. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

73. Решить задачу 69 путем разложения искомого потенциала  $\varphi$  в интеграл Фурье — Бесселя.

74. Тонкий диск радиуса  $R$  равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Используя разложение в интеграл Фурье — Бесселя, найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

75. На поверхности тонкого диска радиуса  $R$  потенциал электрического поля имеет постоянное значение  $\varphi_0$ . Используя разложение в интеграл Фурье — Бесселя, найти потенциал  $\varphi$  в каждой точке пространства в предположении, что вне диска заряды отсутствуют. Определить распределение поверхностной плотности  $\sigma$  заряда на диске.

## § 6. Плотность заряда тел разной конфигурации

76. Потенциал  $\varphi$  электрического поля в цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= a(3R - 2r)r \cos \psi \quad \text{при} \quad r \leq R, \\ \varphi &= \frac{aR^3}{r} \cos \psi \quad \text{при} \quad r \geq R,\end{aligned}$$

где  $a$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда, создавшего это электрическое поле (обратная задача электростатики).

77. Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда, создавшего в пространстве электрическое поле, потенциал  $\varphi$  которого в сферических координатах имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{e}{2R} \left( 3 + \frac{2R}{r} - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{при } r \leq R, \\ \varphi &= \frac{2e}{r} \quad \text{при } r \geq R,\end{aligned}$$

где  $e$  и  $R$  — постоянные. Чему равен полный заряд  $Q$ ?

78. Потенциал  $\varphi$  электрического поля в сферических координатах имеет вид  $\varphi = Q/R$  при  $r \leq R$  и  $\varphi = Q/r$  при  $r \geq R$ , где  $Q$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение заряда, создавшего это электрическое поле.

79. Потенциал  $\varphi$  электрического поля в цилиндрических координатах имеет вид  $\varphi = 0$  при  $r \leq R$  и  $\varphi = q \ln \frac{R}{r}$  при  $r \geq R$ , где  $q$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение заряда, создавшего это электрическое поле.

80. Используя свойства  $\delta$ -функции, найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в декартовых, цилиндрических и сферических координатах при наличии в пространстве следующих однородно заряженных систем: а) сферической поверхности радиуса  $R$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  (центр сферы совпадает с началом координат); б) тонкого кольца радиусом  $R$ , заряженного с линейной плотностью  $q$  (кольцо расположено в плоскости  $XY$ , а его центр совпадает с началом координат); в) бесконечной нити, совпадающей с осью  $Z$  и заряженной с линейной плотностью  $q$ ; г) плоскости  $XY$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ ; д) бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  (ось симметрии совпадает с осью  $Z$ ).

81. Используя свойства  $\delta$ -функции, а также функции

$$\eta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha > 0, \\ 0 & \text{при } \alpha < 0, \end{cases}$$

найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в декартовых, цилиндрических и сферических координатах при наличии в пространстве следующих однородных заряженных систем: а) полусферы радиуса  $R$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  (начало координат совпадает с центром кривизны, а ось  $Z$  направлена в сторону выпуклости полусферы); б) полуокружности радиуса

$R$ , лежащей в первой и второй четвертях плоскости  $XU$  и заряженной с линейной плотностью  $q$  (центр кривизны полуокружности совпадает с началом координат, а ее диаметр лежит на оси  $X$ ); в) тонкого стержня длины  $l$ , лежащего на положительной части оси  $Z$  и заряженного с линейной плотностью  $q$  (один конец стержня находится в начале координат); г) тонкого диска радиуса  $R$ , лежащего в плоскости  $XU$  и заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma$  (центр диска совпадает с началом координат); д) цилиндрической поверхности радиуса  $R$  и высоты  $h$ , заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  (основание цилиндрической поверхности касается плоскости  $XU$ , а ее ось симметрии совпадает с осью  $Z$ ).

82. Равномерно заряженный с линейной плотностью  $q$  эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  лежит в плоскости  $XU$ . Центр эллипса совпадает с началом координат, а большая полуось  $a$  находится на оси  $X$ . Определить распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в декартовых координатах.

83. Эллиптическая поверхность вращения с полуосями  $a$  и  $b$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Центр эллиптической поверхности совпадает с началом декартовой системы координат, а полуось  $b$  лежит на оси  $Z$ , являющейся осью аксиальной симметрии. Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в декартовых координатах.

84. Распределение объемной плотности заряда в пространстве в сферических координатах описывается при помощи  $\delta$ -функции следующим образом:  $\rho = \frac{a}{r^2} \delta(1 - \cos^2 \theta)$ , где  $a$  — постоянная. Определить форму заряженного тела и характер распределения заряда на нем.

85. Определить вид заряженного тела и характер распределения заряда на нем, если объемная плотность заряда в пространстве описывается следующей функцией декартовых координат: а)  $\rho = 2a\sigma\delta(x^2 - a^2)$ , где  $a$  и  $\sigma$  — постоянные; б)  $\rho = 2aq\delta(x^2 - a^2)\delta(z)$ , где  $a$  и  $q$  — постоянные; в)  $\rho = 2q\sqrt{a^2 + b^2}\delta(x^2 - 2ax - 2by + y^2)\delta(z)$ , где  $a$ ,  $b$  и  $q$  — постоянные; г)  $\rho = \frac{Q}{\pi ab}\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\delta(z)$ , где  $a$ ,  $b$  и  $Q$  — постоянные; д)  $\rho = \frac{Q}{2\pi abc}\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $Q$  — постоянные.

## § 7. Дипольный момент

86. Доказать, что дипольный момент заряженной системы не зависит от выбора начала координат, если полный заряд системы равен нулю.

87. Коническая поверхность с образующей  $l$  и радиуса основания  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Вершина конической поверхности находится в начале координат, а высота лежит на положительной части оси  $Z$ . Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в пространстве в сферических координатах. Используя полученное выражение, вычислить дипольный момент  $\mathbf{d}$ .

88. Равномерно заряженный с линейной плотностью  $q$  тонкий стержень длины  $l$  лежит в первой четверти плоскости  $XU$ , образуя с осью  $X$  угол  $\psi_0$ . Один из концов стержня совпадает с началом координат. Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда в пространстве в цилиндрических координатах. Используя полученное выражение, вычислить дипольный момент  $\mathbf{d}$ .

89. Выразить через  $\delta$ -функцию распределение объемной плотности  $\rho$  заряда точечного диполя с моментом  $\mathbf{d}$ , находящегося в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ .

90. Используя предельный переход

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el = \mathbf{d}$$

и выражение для потенциала зарядов  $e$  и  $-e$ , находящихся в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_0$ , определить потенциал  $\varphi$  электрического поля точечного диполя с моментом  $\mathbf{d}$ .

91. Убедиться в том, что напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля диполя с моментом  $\mathbf{d}$ , находящегося в начале координат, можно представить в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d} \operatorname{grad}) \operatorname{grad} 1/r.$$

92. Диполь с моментом  $\mathbf{d}$  расположен в начале координат, а центр шара радиуса  $R$  находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  ( $r > R$ ). Заряд  $Q$  однородно заполняет объем шара. Найти энергию  $U$  взаимодействия диполя с шаром, а также силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к шару.

93. Объем шара радиуса  $R$  заполнен зарядом с объемной плотностью  $\rho = ar^2$ , где  $a$  — постоянная, а  $r$  — расстояние до начала координат, расположенного в центре

шара. В точке с радиус вектором  $\mathbf{r}_0$  находится диполь с моментом  $\mathbf{d}$ . Определить силу  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к диполю в двух случаях: а)  $r_0 > R$ ; б)  $r_0 < R$ .

94. Диполь с моментом  $\mathbf{d}_1$  расположен в начале координат, а другой диполь с моментом  $\mathbf{d}_2$  находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Определить силу  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к каждому диполю.

95. Распределение объемной плотности заряда в пространстве имеет вид  $\rho(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \nabla) \delta(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор. Пользуясь общим решением уравнения Пуассона, найти потенциал электрического поля в каждой точке пространства. По виду полученного потенциала определить физический смысл вектора  $\mathbf{a}$ .

96. В каждой точке пространства задан электрический дипольный момент  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$  единицы объема. Векторная функция  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/r^2$ . Доказать, что заданное распределение плотности дипольного момента  $\mathbf{P}$  создает в каждой точке пространства такое же электрическое поле, как и заряд, распределенный с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$ .

## § 8. Тензор квадрупольного момента

97. Доказать, что тензор квадрупольного момента системы зарядов не зависит от выбора начала координат, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

98. В сферических координатах средняя плотность заряда электронного облака возбужденного атома водорода описывается функцией

$$\rho = -\frac{1}{4 \cdot 3^8} \frac{er^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^4 \theta,$$

где  $a$  — боровский радиус, а  $r$  — расстояние до протона, имеющего заряд  $e$ . Определить тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента атома. Чему равен дипольный момент  $\mathbf{d}$ ?

99. Начало декартовой системы координат совпадает с центром кривизны полусферы радиуса  $R$ , а ось  $Z$  направлена вдоль оси симметрии в сторону выпуклости поверхности. Определить компоненты дипольного  $d_\alpha$  и тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного моментов, если заряд  $Q$  равномерно распределен по: а) объему полусферы;

б) поверхности полусферы; в) поверхности и основанию полусферы.

100. Окружность состоит из двух равномерно и разноименно заряженных полуокружностей. Определить компоненты тензора квадрупольного момента.

101. Равномерно заряженная по поверхности полусфера радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$  и возвышается над плоскостью  $XU$ . Основание полусферы касается осей  $X$  и  $U$  в точках с положительными координатами. Определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

102. Однородно заряженная полуокружность имеет заряд  $Q$  и лежит в первой четверти плоскости  $XU$ . Один конец полуокружности находится в начале координат, а другой — в точке  $x = 2R$  оси  $X$ . Определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

103. Центр эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  совпадает с началом декартовой системы координат. Большая полуось  $a$  лежит на оси  $X$ , а малая — на оси  $U$ . Линейная плотность  $q$  заряда на эллипсе однородна. Считая эксцентриситет  $\epsilon$  эллипса малым ( $\epsilon \ll 1$ ), определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента с точностью до членов порядка  $\epsilon^2$ .

104. Центр однородно заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$  эллиптической поверхности вращения с полуосями  $a$  и  $b$  совпадает с началом декартовой системы координат. Полуось  $b$  лежит на оси  $Z$ , являющейся осью вращения. Эксцентриситет  $\epsilon$  эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  значительно меньше единицы ( $\epsilon \ll 1$ ). Сохраняя члены с наименьшей степенью параметра  $\epsilon$ , определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

105. В вершинах квадрата со стороной  $2a$  расположены точечные заряды так, что знак заряда  $e$  меняется на противоположный при переходе к соседней вершине. Используя общую формулу  $D_{\alpha\beta} = \sum_m e_m (3x_{m\alpha}x_{m\beta} - r_m^2\delta_{\alpha\beta})$ , найти тензоры квадрупольного момента в декартовых системах координат  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$ , повернутых около общей оси  $Z \equiv Z'$  (рис. 1). Определить матрицу поворота  $a_{\alpha\beta}$  и убедиться непосредственным вычислением, что найденные тензоры  $D_{\alpha\beta}$  и  $D'_{\alpha\beta}$  удовлетворяют соотношению  $D'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\sigma}a_{\beta\gamma}D_{\sigma\gamma}$ , где штрихом отмечены компоненты тензора квадрупольного момента в штрихованной системе координат.



106. Два одинаковых точечных диполя находятся на оси  $X$  на равном расстоянии  $a$  от начала координат. В точке с отрицательной координатой дипольный момент  $\mathbf{d}$  антипараллелен оси  $X$ , а другой дипольный момент в плоскости  $XY$  образует с осью  $X$  угол  $\alpha$ . Определить компоненты дипольного  $d_\alpha$  и тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного моментов системы.

107. Определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента однородно заряженного эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$ . Центр эллипсоида вращения совпадает с началом декартовой системы координат, а полуось  $b$  лежит на оси  $Z$ , являющейся осью аксиальной симметрии. Полный заряд равен  $Q$ . Какой вид примет тензор квадрупольного момента, если данный эллипсоид повернуть вокруг оси  $Y$  на угол  $\alpha$  по часовой стрелке?

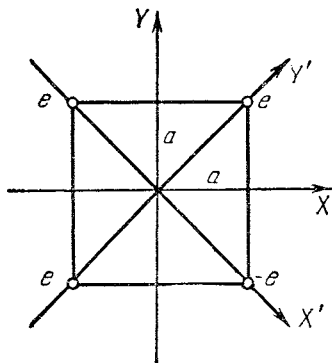


Рис. 1.

108. Начало декартовой системы координат совпадает с центром однородно заряженного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Полуось  $c$  совпадает с осью  $Z$ , а полуось  $a$  составляет с осью  $X$  угол  $\alpha$ . Полный заряд эллипсоида равен  $Q$ . Найти компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

109. Центр окружности радиуса  $R$  совпадает с началом координат. Один диаметр окружности лежит на оси  $X$ , а другой диаметр, перпендикулярный первому, составляет угол  $\alpha$  с осью  $Y$  и находится в первой и третьей четвертях плоскости  $YZ$ . Линейная плотность заряда на окружности однородна, а полный заряд равен  $Q$ . Определить компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента в декартовой системе координат  $XYZ$ .

110. Заряженная система характеризуется тензором  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента. Найти напряженность  $E$  электрического поля в декартовых координатах.

111. Найти потенциал  $\phi$  электрического поля в том случае, когда распределение объемной плотности заряда

в пространстве имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = a_{\alpha\beta} \left( 3 \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \delta_{\alpha\beta} \nabla^2 \right) \delta(\mathbf{r}),$$

где  $a_{\alpha\beta}$  — произвольный постоянный тензор. Исследуя выражение, полученное для потенциала, определить физический смысл тензора  $a_{\alpha\beta}$ .

**112.** Выразить компоненты дипольного  $d_\alpha$  и тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного моментов заряженной системы через соответствующие компоненты мультипольных моментов

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \psi) dV,$$

где  $\rho$  — объемная плотность заряда, а  $Y_{lm}(\theta, \psi)$  — сферическая функция.

**113.** Потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  внешнего электрического поля незначительно меняется на протяжении размеров заряженной системы. Принимая во внимание полный заряд, а также дипольный и квадрупольный моменты, определить потенциальную энергию  $U$  заряженной системы в заданном внешнем поле, если указанная заряженная система представляет собой: а) три заряда  $e$ ,  $e$  и  $-2e$ , расположенных на оси  $X$  на одинаковом расстоянии  $a$  друг от друга (отрицательный заряд находится в точке  $x = 0$  между положительными); б) три заряда  $e$ ,  $e$  и  $-e$ , расположенных в плоскости  $XY$  в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$  и центром в начале декартовой системы координат (отрицательный заряд находится на положительной части оси  $X$ ); в) квадруполь, изображенный на рис. 2; г) однородно заряженный эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ , центр которого расположен в начале декартовой системы координат (полный заряд эллипсоида  $Q$ ).

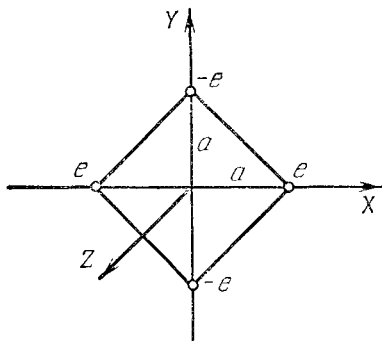


Рис. 2.

находится в точке  $x = 0$  между положительными); б) три заряда  $e$ ,  $e$  и  $-e$ , расположенных в плоскости  $XY$  в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$  и центром в начале декартовой системы координат (отрицательный заряд находится на положительной части оси  $X$ ); в) квадруполь, изображенный на рис. 2; г) однородно заряженный эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ , центр которого расположен в начале декартовой системы координат (полный заряд эллипсоида  $Q$ ).

**114.** Потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  внешнего электрического поля мало меняется на протяжении равномерно заряженного

тонкого диска эллиптической формы с полуосями  $a$  и  $b$ . Полный заряд диска равен  $Q$ , а полуоси  $a$  и  $b$  лежат соответственно на осях  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат. Найти электростатическую энергию  $U$  диска во внешнем поле с учетом квадрупольного момента. Чему равна сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к диску?

115. Напряженность  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  внешнего электрического поля мало меняется на протяжении области пространства, где расположен заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ . Разлагая  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в ряд Тейлора во внутренней точке заряженной области и пренебрегая старшими производными, выразить силу  $\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} dV$ , приложенную к заряженной системе, через ее полный заряд  $Q$ , дипольный момент  $\mathbf{d}$  и тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

116. Заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  сосредоточен в ограниченной области пространства. Напряженность  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  внешнего электрического поля мало меняется внутри указанной области. Разлагая  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в ряд Тейлора и пренебрегая старшими производными, выразить момент  $\mathbf{N} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E}) \rho dV$  сил, приложенный к заряженной системе, через ее дипольный момент  $\mathbf{d}$  и тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента.

117. В сферических координатах средняя плотность заряда электронного облака возбужденного атома водорода задана

$$\rho = -\frac{2}{3^8} \frac{er^2}{\pi a^5} \left(6 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-\frac{2r}{3a}} \cos^2 \theta,$$

где  $a$  — боровский радиус, а  $r$  — расстояние до протона, имеющего заряд  $e$ . Напряженность  $\mathbf{E}$  внешнего электрического поля как функция координат меняется в пространстве незначительно. Определить силу  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к атому с учетом его квадрупольного момента.

118. Однородно заряженный с линейной плотностью  $q$  тонкий стержень длины  $2l$  лежит в плоскости  $XY$ , образуя с осью  $X$  угол  $\psi_0$ . Середина стержня находится в начале координат. На оси  $X$  на большом расстоянии от стержня расположен точечный заряд  $e$ . Определить момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенный к стержню относительно его середины.

## § 9. Поле на больших расстояниях от заряженной системы

**119.** Начало декартовой системы координат совпадает с центром равномерно заряженного тела вращения, а ось  $Z$  направлена по оси симметрии высшего порядка. Найти квадрупольный член в разложении потенциала  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях, если указанным телом является: а) тонкое кольцо радиуса  $R$ , заряженное с линейной плотностью  $q$ ; б) цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $2h$ , заряженный с объемной плотностью  $\rho$ ; в) цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  и высоты  $2h$ , заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$ ;

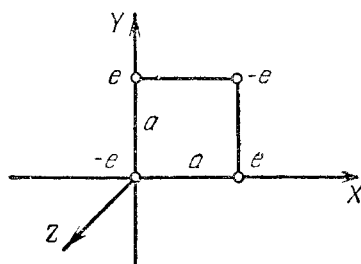


Рис. 3.

г) отрезок длины  $2l$ , заряженный с линейной плотностью  $q$ .

**120.** Найти потенциал  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях с точностью до квадрупольного члена для следующей системы точечных зарядов: а) трех зарядов  $e$ ,  $e$  и  $-2e$ , расположенных на оси  $Z$  на одинаковом расстоянии  $a$  друг от друга (отрицательный заряд находится в точке  $z=0$  между положительными); б) трех зарядов  $e$ ,  $e$  и  $-e$ , расположенных в плоскости  $XY$  в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$  и центром в начале декартовой системы координат (отрицательный заряд находится на положительной части оси  $Y$ ); в) квадруполь, изображенного на рис. 3.

**121.** Найти потенциал  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях от двух одинаковых антипараллельных точечных диполей, расположенных на оси  $X$  на равном расстоянии  $a$  от начала координат. В точке с положительной координатой  $x=a$  дипольный момент параллелен оси  $Z$  и равен  $d$ . Вычисления провести двумя способами: а) сначала вычислить тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента системы, а затем определить его электрическое поле; б) найти электрическое поле системы как суперпозицию полей отдельных диполей.

**122.** Два одинаковых однородно заряженных стержня длины  $l$  лежат в плоскости  $XY$  и образуют угол, рав-

ный  $\psi_0$ . Вершина угла совпадает с началом координат, а одна из его сторон направлена по оси  $X$ . Какова должна быть величина угла  $\psi_0$ , чтобы в точке  $x_0$  оси  $X$  на большом расстоянии от заряженных стержней дипольный потенциал равнялся квадрупольному?

123. Окружность радиуса  $R$  состоит из двух равномерно и разноименно заряженных полуокружностей, которые лежат в первой четверти плоскости  $XU$ . Отрицательно заряженная полуокружность с зарядом  $-Q$  касается осей  $X$  и  $Y$ , а диаметр, разделяющий разноименные заряды, параллелен оси  $X$ . Найти потенциал  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях с точностью до квадрупольного члена.

124. Равномерно заряженный по объему цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $2h$  имеет заряд  $Q$ . Ось  $Z$  совпадает с образующей цилиндра, а ось  $X$  направлена по диаметру его основания. Найти потенциал  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях от цилиндра с точностью до квадрупольного члена.

125. Принимая во внимание полный заряд и квадрупольный момент, найти потенциал  $\phi$  электрического поля на больших расстояниях от заряженной системы, если распределение объемной плотности заряда выражается следующей функцией декартовых координат:

а)  $\rho = \frac{Q}{\pi ab} \delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \delta(z)$ , где  $a$ ,  $b$  и  $Q$  — постоянные;

б)  $\rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b} \delta\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)$ , где  $a$ ,  $b$  и  $Q$  — постоянные;

в)  $\rho = \frac{Q}{2\pi abc} \delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $Q$  — постоянные.

126. Полусфера радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Используя разложение функции  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  по сферическим функциям  $Y_{lm}(\theta, \psi)$ , представить потенциал  $\phi$  электрического поля снаружи полусферы в виде разложения по мультипольным моментам

$$Q_m^{(l)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \psi) dV.$$

127. Окружность радиуса  $R$  состоит из двух равномерно и разноименно заряженных полуокружностей с зарядами  $Q$  и  $-Q$ . Начало координат совпадает с

центром окружности, ось  $Y$  направлена от отрицательных зарядов к положительным, а ось  $X$  разделяет эти заряды между собой. На большом расстоянии  $z \gg R$  от окружности на ее оси находится диполь с моментом  $\mathbf{d}$ , который параллелен оси  $Z$ . Определить силу  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к диполю.

**128.** Заряд  $Q$  однородно заполняет объем эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Начало декартовой системы координат совпадает с центром эллипсоида, а полуоси  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат соответственно на осях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . В точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  на большом расстоянии от эллипсоида расположен диполь с моментом  $\mathbf{d}$ . Найти электростатическую энергию  $U$  взаимодействия диполя с эллипсоидом с учетом диполь-квадрупольного члена.

**129.** Однородно заряженная полуокружность радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Центр кривизны полуокружности совпадает с началом координат, а ее диаметр лежит на оси  $X$ . Ось  $Y$  направлена в сторону полуокружности. Принимая во внимание заряд  $Q$ , а также дипольный и квадрупольный моменты, найти силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к заряду  $e$ , находящемуся на оси  $Z$  на большом расстоянии от полуокружности.

**130.** Заряд  $e$  находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  на большом расстоянии от однородно заряженного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$  и  $c$ , которые направлены соответственно по осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  декартовой системы координат. Полный заряд эллипсоида равен  $Q$ . Принимая во внимание квадрупольный момент, найти отклонение  $\Delta\mathbf{F}$  от закона Кулона для силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к заряду  $e$ .

**131.** Два возбужденных атома водорода расположены на оси  $Z$  на большом расстоянии  $L$  друг от друга ( $L \gg a$ , где  $a$  — боровский радиус). В сферических координатах средние плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$  зарядов электронных облаков этих атомов равны соответственно

$$\rho_1 = -\frac{1}{3^8} \frac{er_1^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r_1}{3a}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

$$\rho_2 = -\frac{1}{4 \cdot 3^8} \frac{er_2^4}{\pi a^7} e^{-\frac{2r_2}{3a}} \sin^4 \theta,$$

где  $e$  — заряд протона, а  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от точки наблюдения до центра первого и второго атома. Определить энергию  $U$  квадруполь-квадрупольного взаимодействия атомов.

## § 10. Двойной электрический слой

132. Однородный двойной электрический слой имеет форму диска радиуса  $R$ , расположенного в плоскости  $XY$ . Центр диска совпадает с началом координат, а плотность дипольного момента  $\tau$  параллельна оси  $Z$ . Найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля на оси  $Z$ .

133. Однородный двойной электрический слой имеет форму полусферы радиуса  $R$  с центром кривизны в начале декартовой системы координат и осью симметрии, совпадающей с осью  $Z$ . Последняя обращена в сторону выпуклости полусферы. Плотность дипольного момента на полусфере направлена по радиусу наружу. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля на оси  $Z$ .

134. Двойной электрический слой в форме полуплоскости ( $y = 0, x \geq 0$ ) имеет плотность дипольного момента  $\tau$ . Определить потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электрического поля в каждой точке пространства, если постоянный вектор  $\tau$  параллелен оси  $Y$  декартовой системы координат.

135. Плоскость однородного двойного электрического слоя имеет круглое отверстие радиуса  $R$ . Начало декартовой системы координат совпадает с центром отверстия, а ось  $Z$  параллельна плотности дипольного момента  $\tau$ . Найти силу  $F$ , приложенную к точечному заряду  $e$ , находящемуся на оси  $Z$ .

136. Однородный двойной электрический слой имеет форму плоскости с выступом в виде полусферы. Плотность дипольного момента  $\tau$  в каждой точке составной поверхности параллельна ее нормали и направлена в полупространство, в которое вдается выступ. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в каждой точке пространства.

137. Доказать, что напряженность  $E$  электрического поля однородного двойного слоя имеет вид  $E(\mathbf{r}) = \tau \oint_L \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ , где  $\tau$  — модуль вектора  $\tau$  плотности дипольного момента двойного электрического слоя, а  $d\mathbf{l}'$  — элемент замкнутого контура  $L$ , на который натянут двойной электрический слой,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы соответственно точки наблюдения и точки нахождения элемента  $d\mathbf{l}'$ . Обход контура интегрирования  $L$  согласован с направлением вектора  $\tau$  правилом правого винта.

## Г л а в а II

### ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Вектор  $\mathbf{H}$  напряженности магнитного поля в вакууме определяется по силе

$$d\mathbf{F} = \frac{J}{c} (d\mathbf{l} \times \mathbf{H}), \quad (\text{II. 1})$$

действующей на элемент  $d\mathbf{l}$  контура, по которому течет ток  $J$ . Здесь  $c$  — электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Постоянное магнитное поле в вакууме создается постоянными токами. Распределение токов в пространстве характеризуется объемной плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , а на поверхности — поверхностной плотностью  $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ . Кроме того, в пространстве может быть задан линейный ток  $J$ , текущий внутри очень тонкой и длинной трубки.

Напряженность постоянного магнитного поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{II. 2})$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (\text{II. 3})$$

Если токи текут в конечной области, то напряженность постоянного магнитного поля на больших расстояниях  $r$  от тока убывает не медленнее, чем  $1/r^3$ . Это утверждение служит дополнительным условием к уравнениям Максвелла (II. 2) и (II. 3) при отыскании  $\mathbf{H}$  в неограниченном пространстве.

На поверхности, по которой распределен ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i}$ , нормальная  $H_n = \mathbf{H}\mathbf{n}$  и тангенциальная  $H_\tau = \mathbf{H}\boldsymbol{\tau}$  составляющие напряженности



магнитного поля удовлетворяют соотношениям

$$H_{2n} - H_{1n} = 0, \quad (\text{II. 4})$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N, \quad (\text{II. 5})$$

где  $i_N = \mathbf{i} \cdot \mathbf{N}$ , а единичные векторы  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{N}$  образуют правовинтовую тройку  $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}$ . Индексы 1 и 2 отмечают напряженность магнитного поля в первой и второй областях, лежащих по разные стороны токовой поверхности. Вектор  $\mathbf{n}$  нормали этой поверхности направлен из первой области во вторую. Формулу (II. 5) часто записывают в векторном виде

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}.$$

Соотношения (II. 4) и (II. 5) являются граничными условиями в магнитостатике.

Используя свойства  $\delta$ -функции, поверхностное распределение тока с плотностью  $\mathbf{i}(\mathbf{r})$  можно учесть в объемной плотности  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , которая будет сингулярной функцией, обращающейся в бесконечность в точках токовой поверхности. В этом случае при решении уравнений Максвелла (II. 2) и (II. 3) с полученной таким способом сингулярной функцией  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  граничные условия (II. 4) и (II. 5) не потребуются.

Магнитное поле линейного тока  $J$  определяется при помощи закона Био и Савара

$$d\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{II. 6})$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы точки наблюдения и точки расположения элемента тока  $J d\mathbf{l}'$ . Согласно принципу суперпозиции полное магнитное поле равно сумме полей, созданных каждым элементом тока в отдельности,

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (\text{II. 7})$$

Когда распределение тока обладает аксиальной симметрией или симметрией относительно плоскости, тогда для нахождения  $\mathbf{H}$  полезно воспользоваться теоремой о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J, \quad (\text{II. 8})$$

где  $J$  — алгебраическая сумма токов, охватываемых замкнутым контуром  $L$ . В общем случае ток  $J$  складывается из объемных, поверхностных и линейных токов, которые пронизывают произвольную поверхность, натянутую на контур интегрирования  $L$ .

С математической стороны удобно от двух уравнений (II.2) и (II.3) первого порядка перейти к одному эквивалентному уравнению второго порядка для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , который определяется соотношением

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{II. 9})$$

Векторный потенциал определен неоднозначно, так как напряженность магнитного поля не меняется, если перейти к другому векторному потенциалу  $\mathbf{A}'$  при помощи преобразования калибровки

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f, \quad (\text{II. 10})$$

где  $f = f(\mathbf{r})$  — произвольная функция.

Чтобы ограничить произвол в выборе векторного потенциала, накладывают дополнительное условие Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (\text{II. 11})$$

В этом случае векторный потенциал магнитного поля удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (\text{II. 12})$$

На поверхности раздела двух областей выполняются граничные условия

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \mathbf{n}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (\text{II. 13})$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2. \quad (\text{II. 14})$$

Решение уравнения (II.12) является непрерывной функцией в каждой точке пространства, в которой текут объемные и поверхностные токи с ограниченной плотностью. Граничное условие на линейном контуре, по которому течет ток  $J$ , записывается при  $r \rightarrow 0$  в виде  $\mathbf{A} = \boldsymbol{\tau} \left( \frac{2J}{c} \ln \frac{1}{r} + \text{const} \right)$ , где  $r$  — кратчайшее расстояние от точки наблюдения до рассматриваемого контура, а  $\boldsymbol{\tau}$  — вектор, касательный к контуру, указывающий направление тока. Если токи сосредоточены в конечной области, то векторный потенциал на больших расстоя-

ниях  $r$  от тока убывает, как  $1/r^2$  или быстрее. Эти замечания следует использовать совместно с граничными условиями (II.13) и (II.14) при отыскании решения уравнения Пуассона (II.12). По найденному таким образом векторному потенциалу определяют напряженность магнитного поля путем дифференцирования (II.9).

С другой стороны, если напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля известна (например, получена из теоремы (II.8)), то векторный потенциал  $\mathbf{A}$  легко найти из соотношения (II.9), рассматриваемого как дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $\mathbf{A}$ .

Векторный потенциал и напряженность магнитного поля объемных токов могут быть записаны в виде объемных интегралов

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{II. 15})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (\text{II. 16})$$

Если объемный интеграл сходится, то векторный потенциал (II.15) является общим решением уравнения Пуассона (II.12), удовлетворяющим граничным условиям (II.13) и (II.14) на поверхности раздела токов и вакуума. Иногда интеграл (II.15) расходится или его не удастся вычислить аналитически, тогда векторный потенциал магнитного поля находят путем решения уравнения Пуассона (II.12) с учетом граничных условий (II.13) и (II.14).

В случае линейного тока величины  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{H}$  получаются из выражений (II.15) и (II.16) путем замены

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \rightarrow J d\mathbf{l}', \quad (\text{II. 17})$$

которая преобразует объемные интегралы (II.15) и (II.16) в криволинейные интегралы по оси весьма тонкой трубки с линейным током  $J$ . Элемент  $d\mathbf{l}'$  оси этой трубки направлен в сторону течения тока  $J$ . После перехода в выражении (II.16) к криволинейному интегралу получаем формулу (II.7). В связи с этим выражение (II.16) также называют законом Био и Савара.

Аналогично, для поверхностных токов в интегралах (II.15) и (II.16) следует сделать замену  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \rightarrow \mathbf{i}(\mathbf{r}') dS'$ .

На больших расстояниях  $r$  от ограниченной области, в которой текут замкнутые токи, векторный потенциал и напряженность магнитного поля принимают вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mu \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{II. 18})$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mu \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mu}{r^3}, \quad (\text{II. 19})$$

где  $\mu$  — магнитный момент замкнутых токов. В случае объемных токов

$$\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV. \quad (\text{II. 20})$$

Для замкнутых линейных токов последнее выражение преобразуется к виду

$$\mu = \frac{JS}{c}, \quad (\text{II. 21})$$

где

$$S = \int dS. \quad (\text{II. 22})$$

Этот интеграл берется по произвольной поверхности, натянутой на контур токовой трубки, по которой течет линейный ток  $J$ . Модуль вектора  $\mathbf{S}$  равен площади, наименьшей из поверхностей интегрирования. Если контур токовой трубки лежит в плоскости, то направление  $\mathbf{S}$  связано с направлением тока  $J$  в трубке правилом правого винта.

Энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 dV. \quad (\text{II. 23})$$

В случае объемных токов, текущих в ограниченной области пространства, магнитную энергию (II.23) токов можно также вычислять по формуле

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV. \quad (\text{II. 24})$$

Магнитная энергия взаимодействия токов, текущих с объемными плотностями  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$ , определяется следующим образом:

$$W = \frac{1}{c^2} \int \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}) \mathbf{j}_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'. \quad (\text{II. 25})$$

Сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к объемному току во внешнем магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ , имеет вид

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV, \quad (\text{II. 26})$$

а магнитная энергия  $W$  взаимодействия указанного тока с внешним магнитным полем выражается через векторный потенциал  $\mathbf{A}$  этого поля

$$W = \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV. \quad (\text{II. 27})$$

Если напряженность  $\mathbf{H}$  внешнего магнитного поля мало меняется на протяжении области пространства, где текут замкнутые токи, то магнитная энергия взаимодействия этих токов с внешним полем выражается через магнитный момент  $\mu$  замкнутых токов

$$W = \mu \mathbf{H}. \quad (\text{II. 28})$$

В этом случае сила  $\mathbf{F}$  и момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенные к токам во внешнем магнитном поле, записываются в виде

$$\mathbf{F} = (\mu \text{ grad}) \mathbf{H} = \text{grad} (\mu \mathbf{H}), \quad (\text{II. 29})$$

$$\mathbf{N} = \mu \times \mathbf{H}. \quad (\text{II. 30})$$

Формулы (II. 29) и (II. 30) аналогичны соответствующим формулам (I. 36) и (I. 37) электростатики, в которой выражение  $-\mathbf{dE}$  представляет собой потенциальную энергию дипольного момента  $\mathbf{d}$  во внешнем электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ . Физическая величина  $\mu \mathbf{H}$  в магнитостатике не является потенциальной энергией. В связи с этим иногда вводят в рассмотрение так называемую потенциальную функцию  $U = -\mu \mathbf{H}$ , которая позволяет представить силу, приложенную к магнитному моменту во внешнем магнитном поле, в обычной форме  $\mathbf{F} = -\text{grad } U$ . В механике применительно к частице с магнитным моментом  $\mu$  величина  $-\mu \mathbf{H}$  называется энергией магнитного момента  $\mu$  во внешнем магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ .

Суммарную объемную силу (II. 26) можно заменить системой поверхностных сил, приложенных к поверхности объема  $V$ , внутри которого текут токи с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ ,

$$\mathbf{F}_a = \frac{1}{c} \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{H})_a dV = \oint_S T_{a\beta} n_\beta dS. \quad (\text{II. 31})$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — орт внешней нормали замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , а  $T_{\alpha\beta}$  — максвелловский тензор натяжений

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} H^2 \delta_{\alpha\beta} \right). \quad (\text{II. 32})$$

## § 1. Уравнения Максвелла и граничные условия в магнитостатике

138. Можно ли подобрать такое распределение электрического тока снаружи полой области, чтобы внутри нее напряженность магнитного поля имела вид: а)  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ ; б)  $\mathbf{H} = b(z\mathbf{l}_x + x\mathbf{l}_y + y\mathbf{l}_z)$ , где  $b$  — постоянная; в)  $\mathbf{H} = \frac{3(\mu\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mu}{r^3}$ , где вектор  $\mu$  не зависит от координат и времени, а точка с радиус-вектором  $\mathbf{r} = 0$  находится вне полой области?

139. Можно ли создать в пространстве постоянный электрический ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-ar}$ , где  $a$  — положительная постоянная, а объемная плотность заряда не зависит от времени?

140. Определить распределение объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока в пространстве, если напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля этого тока имеет вид: а)  $\mathbf{H} = f(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , где вектор  $\mathbf{a}$  не зависит от координат и времени, а  $f(r)$  — произвольная дифференцируемая функция; б)  $\mathbf{H} = (a\mathbf{r})(\mathbf{b} \times \mathbf{r})$ , где векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  параллельны и не зависят от координат и времени; в)  $\mathbf{H} = H_r\mathbf{l}_r + H_\theta\mathbf{l}_\theta + H_\psi\mathbf{l}_\psi$ , где компоненты вектора  $\mathbf{H}$  в сферических координатах

$$H_r = a \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos \theta, \quad H_\theta = a \left( \frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right) \sin \theta, \\ H_\psi = 0 \quad \text{при} \quad r \leq R,$$

$$H_r = \frac{2aR^5}{15r^3} \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{aR^5}{15r^3} \sin \theta, \\ H_\psi = 0 \quad \text{при} \quad r \geq R;$$

г)  $\mathbf{H} = H_r\mathbf{l}_r + H_\psi\mathbf{l}_\psi + H_z\mathbf{l}_z$ , где компоненты вектора  $\mathbf{H}$  в цилиндрических координатах

$$H_r = 0, \quad H_\psi = gr, \quad H_z = b(R^2 - r^2) \quad \text{при} \quad r \leq R, \\ H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{gR^2}{r} \quad \text{при} \quad r \geq R.$$

Здесь  $a$ ,  $b$ ,  $g$  и  $R$  — постоянные.

141. Вычисляя ротор и дивергенцию напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля, необходимо убедиться в том, что в случае магнитостатики выражение

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

удовлетворяет уравнениям Максвелла. Здесь  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  — объемная плотность постоянного тока в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}'$ , а  $c$  — скорость света в вакууме.

142. Непосредственным вычислением убедиться в том, что в случае постоянного однородного магнитного поля с напряженностью  $\mathbf{H}$  векторный потенциал  $\mathbf{A}$ , удовлетворяющий условию Лоренца, можно записать в виде  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \times \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор произвольной точки наблюдения.

143. Считая объемную плотность тока  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$  и ее первые производные непрерывными функциями в каждой точке рассматриваемой области (поверхностные и линейные токи отсутствуют), доказать, что нормальная составляющая вектора  $\mathbf{j}$  на граничной с вакуумом поверхности обращается в нуль.

144. Постоянный ток течет с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$  в конечном объеме, который граничит с вакуумом. Функция  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  непрерывна внутри данного объема, включая точки граничной поверхности. Доказать, что  $\int \mathbf{j} dV = 0$ .

145. Доказать, что общее решение уравнения Пуассона в магнитостатике

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

удовлетворяет условию Лоренца, если токи текут в ограниченной области или убывают на больших расстояниях от точки наблюдения не медленнее, чем  $1/(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2$ .

146. При каком условии энергию магнитного поля  $W = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 dV$  можно представить в виде  $W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{jA} dV$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля тока, текущего с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ ?

147. Электрический ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$  течет в ограниченной области пространства.

Доказать, что вид формулы  $W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV$  для магнитной энергии тока не изменится, если от векторного потенциала  $\mathbf{A}$  перейти к новому векторному потенциалу  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$ , где  $f = f(\mathbf{r})$  — произвольная функция

$$W = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A}' dV.$$

148. Определить распределение поверхностной плотности тока, если напряженность  $\mathbf{H}$  однородного магнитного поля, созданного этим током, имеет вид: а) вектор  $\mathbf{H}$  параллелен оси  $Y$  в области между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  ( $a < b$ ) и равен нулю вне этой области; б) вектор  $\mathbf{H}$  параллелен оси  $Y$  в полупространстве  $x < a$ , антипараллелен оси  $Y$  в полупространстве  $x > b$  ( $a < b$ ) и равен нулю между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ ; в) вектор  $\mathbf{H}$  внутри цилиндрической поверхности параллелен ее оси и равен нулю снаружи.

149. Используя декартовые, цилиндрические или сферические координаты и свойства  $\delta$ -функции, найти распределение объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока в пространстве для следующих случаев: а) по цилиндрической поверхности радиуса  $R$  параллельно ее оси течет однородный ток с поверхностной плотностью  $i_0$ ; б) по оси  $Z$  в положительном направлении течет линейный ток  $J$ ; в) ток с поверхностной плотностью  $i_0$  течет в плоскости  $XY$ ; г) в плоскости  $XY$  по бесконечно тонкому кольцу радиуса  $R$  течет линейный ток  $J$ , образуя правовинтовую систему с осью  $Z$ , которая проходит через центр кольца; д) равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  сферическая поверхность радиуса  $R$  вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью  $\omega$ , направленной вдоль оси  $Z$ ; е) равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  поверхность кругового конуса с вершиной в начале координат вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ , направленной вдоль оси  $Z$  (телесный угол конуса содержит положительную часть оси  $Z$  и равен  $2\pi(1 - \cos \theta)$ ).

150. Можно ли создать в плоскости  $YZ$  постоянный электрический ток с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i} = (e^{-ay^2} \mathbf{i}_y + e^{-az^2} \mathbf{i}_z) i_0,$$

где  $a$  и  $i_0$  — постоянные?



151. Определить конфигурацию области, по которой течет ток, а также характер распределения тока в ней, если объемная плотность тока в неограниченном пространстве описывается следующей функцией декартовых координат: а)  $\mathbf{j} = 2a\mathbf{i}_0\delta(x^2 - a^2)$ , где  $a$  — постоянная, а постоянный вектор  $\mathbf{i}_0$  параллелен плоскости  $YZ$ ; б)  $\mathbf{j} = 2aJ_y\delta(x^2 - a^2)\delta(z)$ , где  $a$  и  $J$  — постоянные.

152. Ток  $J$  течет по тонкому замкнутому контуру  $L$ . Доказать, что для вычисления напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля тока можно ввести скалярный потенциал  $\Phi$  согласно формуле  $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi$ . Найти уравнение и дополнительные условия, определяющие  $\Phi$ .

153. Определить скалярный потенциал  $\Phi$  и напряженность  $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi$  магнитного поля линейного тока  $J$ , текущего вдоль оси  $Z$ .

## § 2. Магнитный момент

154. В сферических координатах компоненты вектора  $\mathbf{j}$  средней объемной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода, равны

$$j_r = j_\theta = 0 \quad \text{и} \quad j_\phi = \frac{1}{3^3} \frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin\theta \cos^2\theta,$$

где  $a$  — боровский радиус,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона, а  $r$  — расстояние до протона. Вычислить магнитный момент  $\mu$  орбитального тока.

155. Распределение объемной плотности тока  $\mathbf{j}$  в пространстве описывается выражением  $\mathbf{j} = \text{rot}[\mathbf{a}F(r)]$ , где  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор, а функция  $F(r)$  убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/r^3$ . Выразить магнитный момент  $\mu$  тока через интеграл от функции  $F(r)$ .

156. Объемная плотность тока в пространстве имеет вид  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r}_0$  — постоянные векторы. Определить магнитный момент  $\mu$  тока.

157. Внутренний магнитный момент электрона по абсолютной величине равен магнетону Бора  $\mu_0 = \frac{|e|\hbar}{2mc}$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света в вакууме, а  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Согласно классической модели электрон представляет собой однородно заряженный шар радиуса  $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ . Рассматривая

внутренний магнитный момент как результат вращения электрона вокруг своей оси симметрии, определить угловую скорость  $\omega$  этого вращения. Во сколько раз изменится угловая скорость вращения, если предположить, что заряд  $e$  равномерно размазан по поверхности шара?

158. Доказать, что магнитный момент  $\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV$  тока, текущего в пространстве с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ , не зависит от выбора начала координат. Предполагается, что магнитный момент тока имеет конечное значение.

159. В некоторой ограниченной области пространства течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Напряженность  $\mathbf{H}$  внешнего магнитного поля внутри этой области однородна. Выразить магнитную энергию  $W = \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV$  взаимодействия тока с внешним магнитным полем через магнитный момент  $\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV$  тока. Здесь  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего магнитного поля.

160. Однородно заряженный цилиндр произвольной высоты и радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Полный заряд цилиндра равен  $Q$ , а его ось вращения образует с напряженностью  $\mathbf{H}$  внешнего однородного магнитного поля некоторый угол. Определить магнитную энергию  $W$  взаимодействия цилиндра с внешним магнитным полем.

161. Внутри ограниченной области пространства течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Напряженность  $\mathbf{H}$  внешнего магнитного поля во всем пространстве однородна. Выразить момент  $\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{H})) dV$  сил, приложенный к току, через магнитный момент  $\mu$  тока. Доказать, что момент сил не зависит от выбора фиксированной точки, относительно которой он вычисляется.

162. Равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  и высоты  $h$  вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Ось вращения образует с напряженностью  $\mathbf{H}$  внешнего однородного магнитного поля некоторый угол. Определить момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенный к цилиндрической поверхности.

163. Напряженность  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$  внешнего магнитного поля мало меняется на протяжении некоторой конечной

области пространства, где текут токи с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ . Разлагая  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  в ряд Тейлора во внутренней точке данной области и пренебрегая старшими производными, выразить силу

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) dV,$$

$$\text{приложенную к току, через его магнитный момент } \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV.$$

### § 3. Магнитное поле на больших расстояниях от тока

164. Однородно заряженный эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии. Полный заряд эллипсоида равен  $Q$ , а его полуось  $b$  лежит на оси вращения. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на больших расстояниях от эллипсоида.

165. Заряд  $Q$  равномерно распределен по конической поверхности ( $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ ), которая вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на больших расстояниях от конической поверхности.

166. Ток  $J$  течет по тонкой токовой трубке в форме равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на больших расстояниях  $r$  от тока.

167. Две одинаковые равномерно заряженные сферические поверхности радиуса  $R$  расположены на большом расстоянии друг от друга. Полный заряд каждой сферической поверхности равен  $Q$ , а их угловые скорости вращения вокруг собственных осей симметрии равны  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Определить магнитную энергию  $W$  взаимодействия сферических поверхностей.

168. Заряд  $Q$  однородно заполняет объем конуса ( $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ ), который вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . На большом расстоянии  $r$  от конуса находится частица с внутренним магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}$ . Определить силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к частице.

## § 4. Закон Био и Савара

**169.** Распределение объемной плотности тока в пространстве имеет вид  $\mathbf{j} = j(\mathbf{r})\mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  — постоянный вектор, а  $j(\mathbf{r})$  — скалярная функция декартовых координат. Доказать, что в каждой точке пространства напряженность магнитного поля тока перпендикулярна вектору  $\mathbf{l}$ .

**170.** Заряд  $Q$  однородно заполняет объем шара радиуса  $R$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в центре шара, если последний вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Во сколько раз изменится напряженность магнитного поля в центре шара, если заряд  $Q$  равномерно размазать по его поверхности?

**171.** Равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  коническая поверхность ( $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ ) вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в вершине конической поверхности.

**172.** В сферических координатах компоненты вектора  $\mathbf{j}$  средней объемной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода, равны

$$j_r = j_\theta = 0$$

и

$$j_\psi = \frac{1}{2 \cdot 3^3} \frac{e\hbar r^3}{\pi m a^7} e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^3 \theta,$$

где  $a$  — боровский радиус,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона, а  $r$  — расстояние до протона. Орбитальный ток создает в пространстве магнитное поле. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  этого магнитного поля в начале координат.

**173.** Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна  $\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ , где  $a$  — боровский радиус,  $r$  — расстояние до протона, а  $e$  — заряд электрона. Если поместить атом во внешнее однородное магнитное поле с напряженностью  $\mathbf{H}_0$ , то электронное облако придет во вращение, которое создаст в пространстве ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \frac{e\rho}{2mc} (\mathbf{r} \times \mathbf{H}_0)$ , где  $m$  — масса электрона, а  $c$  — скорость света в вакууме. На какую величину  $\Delta H$  изменится напряженность

магнитного поля в центре атома вследствие вращения электронного облака?

174. Заряд  $Q$  однородно распределен по объему шара радиуса  $R$ . Одна половина шара вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ , а другая вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  в противоположном направлении. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в центре составного шара. Какую часть заряда  $Q$  необходимо однородно распределить внутри первой вращающейся половины и какую во второй, чтобы напряженность магнитного поля в центре шара равнялась нулю?

175. Объемная плотность заряда в пространстве дается выражением

$$\rho = \frac{Q}{2\pi a^2 b} \delta\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в начале координат, если заряды вращаются около оси  $Z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Рассмотреть случаи  $a > b$  и  $a < b$ .

176. Шаровой сектор получен пересечением сферы радиуса  $R$  конической поверхностью с вершиной в центре сферы. Заряд  $Q$  однородно заполняет объем шарового сектора, телесный угол которого равен  $2\pi(1 - \cos \theta_0)$ . Определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в вершине шарового сектора, если последний вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

177. Заряд  $Q$  равномерно распределен внутри конуса  $(x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq h)$ , который вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В вершине конуса находится частица с внутренним магнитным моментом  $\mu$ . Определить магнитную энергию  $W$  взаимодействия частицы с вращающимся конусом.

178. В сферических координатах компоненты вектора  $\mathbf{j}$  средней объемной плотности орбитального тока, текущего в возбужденном атоме водорода, равны

$$j_r = j_\theta = 0$$

и

$$j_\varphi = \frac{e\hbar r}{64\pi m a^5} e^{-\frac{r}{a}} \sin \theta,$$

где  $a$  — боровский радиус,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона,  $r$  — расстояние до протона, имеющего внутренний магнитный момент  $\mu$ , направленный по оси  $Z$ . Определить магнитную энергию  $W$  взаимодействия магнитного момента протона с орбитальным током. Поскольку орбитальный ток обусловлен движением электрона, а внутренний магнитный момент протона связан с его спином, данная задача описывает спин-орбитальное взаимодействие протона с электроном в атоме водорода.

179. Средняя объемная плотность тока в атоме водорода, обусловленная спином электрона, задана  $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} [\mu_0 F(r)]$ , где  $F(r) = \frac{1}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ . Здесь  $a$  — боровский радиус,  $c$  — скорость света в вакууме,  $r$  — расстояние до протона, а  $\mu_0$  — внутренний магнитный момент электрона. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в центре атома водорода. Принимая во внимание, что протон имеет внутренний магнитный момент  $\mu$ , определить магнитную энергию  $W$  взаимодействия протона с найденным магнитным полем. Поскольку внутренние магнитные моменты частиц связаны с их спинами, величина  $-W$  характеризует спин-спиновое взаимодействие электрона с протоном в атоме водорода.

180. Заряд  $Q$  равномерно распределен по объему эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Эллипсоид вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси симметрии, проходящей вдоль полуоси  $b$ . В центре эллипсоида находится частица с внутренним магнитным моментом  $\mu$ . Определить момент  $\mathbf{N}$  сил, приложенный к частице.

181. Бесконечно тонкий диск радиуса  $R$ , равномерно заряженный с поверхностной плотностью  $\sigma$ , вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Пользуясь общей формулой

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS',$$

найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на оси диска. Здесь  $\mathbf{i}(\mathbf{r}')$  — поверхностная плотность тока, созданного вращающимся диском. Исследуя напряженность магнитного поля на больших расстояниях от диска, определить магнитный момент  $\mu$  вращающегося диска. Получить

магнитный момент также непосредственным вычислением по формуле

$$\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{i}) dS.$$

182. Объемная плотность тока в пространстве выражается через  $\delta$ -функцию следующим образом:  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = (\mathbf{a} \times \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r}_0$  — постоянные векторы. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля. Исследуя полученные выражения, определить физический смысл вектора  $\mathbf{a}$ .

183. Каждая единица объема электронного облака в атоме водорода имеет магнитный момент, обусловленный спином электрона. Распределение плотности магнитного момента описывается функцией  $\mu_0 F(r)$ , где  $\mu_0$  — внутренний магнитный момент электрона, а  $F(r)$  — плотность электронного облака на расстоянии  $r$  от протона. Функция  $F(r)$  убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/r$ . Показать, что данное распределение плотности магнитного момента создает в пространстве такое же магнитное поле, как и ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = c \operatorname{grad} [\mu_0 F(r)]$ , где  $c$  — скорость света в вакууме.

184. По тонкой токовой трубке, образующей прямой угол, течет ток  $J$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в двух случаях: а) на оси  $X$ , являющейся продолжением одной из сторон прямого угла; б) на оси  $Y$ , проходящей через вершину прямого угла перпендикулярно токовым линиям.

185. Чему равна напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в точках биссектрисы прямого угла на расстоянии  $r$  от его вершины в предыдущей задаче?

186. Ток  $J$  течет по тонкой токовой трубке в форме равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в вершине треугольника.

187. Ток  $J$  течет по тонкой токовой трубке, образующей квадрат со стороной  $2a$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно его плоскости. Исследуя полученное выражение на больших расстояниях от квадрата, определить магнитный момент  $\mu$  тока.

188. Ток  $J$  течет по тонкой бесконечной прямой токовой трубке, которая имеет локальное искривление в виде полуокружности радиуса  $R$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$

магнитного поля в центре кривизны указанной полукружности.

189. По тонкому кольцу радиуса  $R$  течет ток  $J$ . Используя закон Био и Савара, определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на оси кольца, выразив ее через магнитный момент  $\mu$  тока.

## § 5. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля

190. Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет однородный ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Пользуясь интегральной формой уравнения Максвелла  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S}$ , найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри и снаружи цилиндра. При помощи соотношения  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  определить векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля. При калибровке векторного потенциала принять, что он обращается в нуль на поверхности цилиндра.

191. Решить предыдущую задачу в предположении, что объемная плотность тока имеет аксиальную симметрию  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$ , где  $\mathbf{j}(r)$  — произвольная функция расстояния  $r$  до оси цилиндра.

192. Ток  $J$  однородно распределен по сечению бесконечного цилиндра радиуса  $R$ . Используя максвелловский тензор натяжений, найти силу  $\mathbf{F}$ , прижимающую друг к другу две одинаковые половины цилиндра. Здесь  $\mathbf{F}$  — сила, приложенная к единице длины одной из половин цилиндра. Подтвердить полученный результат независимым вычислением с использованием объемной силы.

193. По бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  параллельно ее оси течет однородный ток с поверхностной плотностью  $i_0$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля, не прибегая к векторному потенциалу.

194. По плоскости  $XU$  параллельно оси  $X$  течет однородный ток с поверхностной плотностью  $i_0$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля, не прибегая к векторному потенциалу.

195. В пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ , который однороден по сечению токовой трубки и параллелен ее



оси. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

196. Внутри неограниченной пластины параллельно ее поверхностям  $z = l$  и  $z = -l$  течет однородный ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Не прибегая к векторному потенциалу, определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри и снаружи пластины, если токовые линии параллельны оси  $Y$ .

197. Вдоль прямой ( $x = l, y = 0$ ) параллельно оси  $Z$  течет ток  $J$ . По другой прямой ( $x = -l, y = 0$ ) течет антипараллельный ток той же величины. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля. Исследовать  $\mathbf{H}$  на больших расстояниях от заданных токов.

198. Квадратная рамка со стороной  $a$  находится в одной плоскости с прямолинейным током  $J$ . На каком расстоянии  $r$  от тока расположена ближайшая сторона рамки, если поток магнитного поля через поверхность рамки равен  $\Phi_0$ ?

199. Прямолинейный ток  $J_1$  находится в одной плоскости с током  $J_2$ , текущим по тонкой квадратной рамке со стороной  $a$ . Ближайшая сторона рамки расположена на расстоянии  $r$  от тока  $J_1$  и имеет одинаковое с ним направление тока. Чему равна сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к рамке?

200. По плоскости  $z = l$  параллельно оси  $Y$  течет однородный ток с поверхностной плотностью  $i_0$ . По другой плоскости  $z = -l$  течет антипараллельный ток той же величины. Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в каждой точке пространства. Какой вид приобретает вектор  $\mathbf{H}$ , если токи на обеих плоскостях параллельны оси  $Y$ ?

201. Линейный ток  $J$  течет по оси  $Z$  из бесконечно удаленной точки  $z = -\infty$  к началу координат. В плоскости  $XU$  он растекается от начала координат во все стороны равномерно. Определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля во всех точках пространства и проверить выполнимость граничного условия для вектора  $\mathbf{H}$  при переходе через координатную плоскость  $XU$ . Представить вектор  $\mathbf{H}$  в виде суммы двух слагаемых  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ , которые обусловлены соответственно линейным и поверхностным токами.

202. Линейный ток  $J$  течет по оси  $Z$  в положительном направлении, взяв начало в бесконечно удаленной точке  $z = -\infty$ . В точке  $z = -R$  этот ток растекается по

поверхности однородной сферы радиуса  $R$  с центром в начале координат, а затем вновь собирается в диаметрально противоположной точке  $z = R$  и продолжает течь вдоль оставшейся части оси  $Z$ . Определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в пространстве и проверить выполнимость граничного условия для вектора  $\mathbf{H}$  при переходе через указанную сферу.

203. Исходя из закона Био и Савара

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{J}{c} \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

получить соотношение  $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} J$ . Здесь  $L$  — любой

контур интегрирования, сцепляющийся с токовым контуром  $L'$ , а  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля тока  $J$ .

204. В пространстве между двумя не коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 + l < R_2$ ) параллельно их осям течет однородный ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Расстояние между осями цилиндрических поверхностей равно  $l$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри цилиндрической полости радиуса  $R_1$ .

205. Две неограниченные бесконечно тонкие пластины, лежащие в плоскости  $XZ$ , разделены между собой щелью ширины  $a$ . Центральная линия щели совпадает с осью  $Z$ . По пластинам параллельно оси  $Z$  течет однородный ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i}_0$ . Найти напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля на больших расстояниях  $r \gg a$  от щели с учетом членов порядка  $1/r$ .

206. Цилиндр радиуса  $R_1$  расположен не коаксиально внутри другого цилиндра радиуса  $R_2$ . Вдоль первого и второго цилиндров текут однородные антипараллельные токи с объемной плотностью соответственно  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{j}_2$ . Ток наружного цилиндра не проникает во внутренний. Расстояние между параллельными осями бесконечных цилиндров равно  $l$ . Найти силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к единице длины внутреннего цилиндра.

207. Определить величину  $W = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_1 \mathbf{A}_2 dV$ , относенную к единице длины цилиндров, которые описаны в предыдущей задаче. Здесь  $\mathbf{A}_2$  — векторный потенциал магнитного поля тока  $\mathbf{j}_2$ . Для однозначности результата

принять, что векторный потенциал, созданный токами каждого однородного сплошного цилиндра, равен нулю на его поверхности. Убедиться, что сила, приложенная к единице длины внутреннего цилиндра, по абсолютной величине равна  $F = \frac{\partial W}{\partial l}$ .

## § 6. Уравнения Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями

208. В сферических координатах две компоненты векторного потенциала равны нулю  $A_r = A_\theta = 0$ , а третья имеет вид

$$A_\psi = ar \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin \theta \quad \text{при } r \leq R$$

и

$$A_\psi = \frac{2aR^5}{15r^2} \sin \theta \quad \text{при } r \geq R,$$

где  $a$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока, создавшего магнитное поле с данным векторным потенциалом.

209. В цилиндрических координатах две компоненты векторного потенциала равны нулю  $A_r = A_z = 0$ , а третья имеет вид

$$A_\psi = ar \left( R^2 - \frac{r^2}{2} \right) \quad \text{при } r \leq R$$

и

$$A_\psi = \frac{aR^4}{2r} \quad \text{при } r \geq R,$$

где  $a$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока, создавшего магнитное поле с данным векторным потенциалом.

210. В сферических координатах две компоненты векторного потенциала равны нулю  $A_r = A_\theta = 0$ , а третья имеет вид

$$A_\psi = ar \sin \theta \quad \text{при } r \leq R \quad \text{и} \quad A_\psi = \frac{aR^3}{r^2} \sin \theta \quad \text{при } r \geq R,$$

где  $a$  и  $R$  — постоянные. Найти распределение поверхностной плотности  $\mathbf{i}$  тока, создавшего магнитное поле с данным векторным потенциалом.

211. Переход от векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  к новому векторному потенциалу  $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \text{grad } f$  не изменяет напряженности постоянного магнитного поля, где  $f = f(\mathbf{r})$  — произвольная функция координат. Какому условию должна удовлетворять функция  $f(\mathbf{r})$ , чтобы переход к новому векторному потенциалу не нарушал также условия Лоренца в магнитостатике?

212. Объемная плотность тока в пространстве меняется от точки к точке по периодическому закону  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{k}\mathbf{r}$ , где постоянные векторы  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{k}$  удовлетворяют соотношению  $\mathbf{k}\mathbf{j}_0 = 0$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля, которые созданы этим током в неограниченном пространстве.

213. Объемная плотность тока в полупространстве  $z \leq 0$  имеет периодическую структуру  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cos \mathbf{k}\mathbf{r}$ , где постоянные векторы  $\mathbf{j}_0$  и  $\mathbf{k}$  удовлетворяют соотношению  $\mathbf{k}\mathbf{j}_0 = 0$ , причем вектор  $\mathbf{j}_0$  параллелен плоскости  $XY$ , а три компоненты вектора  $\mathbf{k}$  отличны от нуля. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

214. По плоскости  $XY$  течет ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_0 \cos \mathbf{l}\mathbf{r}$ , где постоянные векторы  $\mathbf{i}_0$  и  $\mathbf{l}$  лежат в указанной плоскости и удовлетворяют соотношению  $\mathbf{l}\mathbf{i}_0 = 0$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

215. По декартовым плоскостям  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  текут поверхностные токи с плотностью соответственно  $\mathbf{i}_1 = \mathbf{a}_1 \cos \mathbf{l}_1\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{i}_2 = \mathbf{a}_2 \cos \mathbf{l}_2\mathbf{r}$  и  $\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_3 \cos \mathbf{l}_3\mathbf{r}$ . Постоянные векторы  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$  и  $\mathbf{l}_3$  удовлетворяют условию  $\mathbf{a}_1\mathbf{l}_1 = \mathbf{a}_2\mathbf{l}_2 = \mathbf{a}_3\mathbf{l}_3 = 0$  и лежат в плоскостях соответственно  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

216. Внутри бесконечной пластины, ограниченной плоскостями  $x = a$  и  $x = -a$ , течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \sin l_1 x \sin l_2 y$ , где постоянный вектор  $\mathbf{j}_0$  параллелен оси  $Z$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля внутри и вне пластины.

217. Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 r^s \cos n\psi$ , где  $r$  — цилиндрическая координата,  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью цилиндра. Целое положительное число  $n$  и константа  $s$  удовлетворяют условию  $n^2 \neq (s + 2)^2$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля внутри и снаружи цилиндра,

218. Объемная плотность тока в цилиндрических координатах имеет вид

$$\mathbf{j} = j_0 \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\mathbf{j} = j_0 \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \geq R,$$

где постоянный вектор  $j_0$  параллелен оси  $Z$ ,  $R$  — постоянная, а целое положительное число  $n$  больше единицы. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

219. Бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри и снаружи цилиндра.

220. Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$ , где  $r$  — расстояние до оси цилиндра. Пользуясь уравнением для векторного потенциала  $\mathbf{A}$ , найти его значение внутри и снаружи цилиндра. Произвольное постоянное слагаемое векторного потенциала выбрать так, чтобы величина  $\mathbf{A}$  обращалась в нуль на поверхности цилиндра.

221. Шар радиуса  $R$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри и снаружи шара. Выразить  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{H}$  во внешней области шара через его магнитный момент  $\mu$ .

222. Используя тензор натяжений Максвелла и результаты предыдущей задачи, определить магнитостатическую силу  $\mathbf{F}$ , с которой одна половина шара действует на другую в направлении оси вращения.

223. По бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  параллельно ее оси течет ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i} = i_0 \cos n\psi$ , где  $n$  — целое число ( $n > 1$ ),  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью цилиндрической поверхности и направлена в ту же сторону, что и постоянный вектор  $i_0$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

224. Используя уравнение для векторного потенциала, решить предыдущую задачу в предположении, что  $n = 0$ .

225. Равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  бесконечная цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и одновременно движется со скоростью  $v$  вдоль той же оси. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в каждой точке пространства.

226. Равномерно заряженная с поверхностной плотностью  $\sigma$  сферическая поверхность радиуса  $R$  вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в произвольной точке пространства. Исследуя полученные выражения, определить магнитный момент  $\mu$  вращающейся сферы. Получить магнитный момент также непосредственным вычислением по формуле  $\mu = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{i}) dS$ , где  $\mathbf{i}$  — поверхностная плотность тока, образованного вращающейся сферой.

227. По бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  течет ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_1$  при  $0 < \psi < \pi$  и  $\mathbf{i} = \mathbf{i}_2$  при  $\pi < \psi < 2\pi$ , где  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$  — постоянные векторы,  $\psi$  — полярный угол, а ось  $Z$  совпадает с осью цилиндрической поверхности и параллельна векторам  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$ . Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля внутри и снаружи цилиндрической поверхности.

228. Компоненты  $H_r$ ,  $H_\theta$  и  $H_\psi$  напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля в сферических координатах

$$H_r = b \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos \theta,$$

$$H_\theta = b \left( \frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right) \sin \theta, \quad H_\psi = 0 \quad \text{при } r < R$$

и

$$H_r = \frac{2bR^5}{15r^3} \cos \theta, \quad H_\theta = \frac{bR^5}{15r^3} \sin \theta, \quad H_\psi = 0 \quad \text{при } r > R,$$

где  $b$  и  $R$  — постоянные. Пользуясь соотношением  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ , определить векторный потенциал  $\mathbf{A}$  магнитного поля при дополнительном условии  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

229. Определить энергию  $W$  магнитного поля равномерно заряженной сферической поверхности радиуса  $R$ , которая вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Полный заряд сферы  $Q$ . Выразить энергию  $W$  через магнитный момент  $\mu$  вращающейся сферы.

230. Определить энергию  $W$  магнитного поля однородно заряженного шара радиуса  $R$ , вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Полный заряд шара  $Q$ . Выразить энергию  $W$  через магнитный момент  $\mu$  вращающегося шара.

231. Определить энергию  $W$  магнитного поля, приходящуюся на единицу длины однородно заряженного цилиндра радиуса  $R$ , который вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Заряд на единицу длины цилиндра равен  $q$ . Выразить энергию  $W$  через магнитный момент  $\mu$  единицы длины вращающегося цилиндра.

232. Определить энергию  $W$  магнитного поля, приходящуюся на единицу длины равномерно заряженной с плотностью  $\sigma$  цилиндрической поверхности радиуса  $R$ , которая вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Выразить энергию  $W$  через магнитный момент  $\mu$  единицы длины вращающейся цилиндрической поверхности.

233. Определить энергию  $W$  магнитного поля, приходящуюся на единицу длины цилиндрической поверхности, описанной в задаче 223.

234. По одной половине бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  параллельно ее оси течет ток с поверхностной плотностью  $i$ , а по другой половине течет антипараллельный ток той же величины. Определить энергию  $W$  магнитного поля, приходящуюся на единицу длины цилиндрической поверхности.

235. Вдоль цилиндра радиуса  $R$  течет однородный ток  $J$ , а по другому цилиндру того же радиуса течет антипараллельный ток той же величины. Определить векторный потенциал  $A$  магнитного поля на больших расстояниях от цилиндров. Будет ли конечной энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины такой системы?

### Г л а в а III

#### ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей в общем случае удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\text{III. 1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{III. 2})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (\text{III. 3})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (\text{III. 4})$$

где  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — распределение объемной плотности заряда и тока в пространстве.

Точечные заряды  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), движущиеся со скоростями  $\mathbf{v}_i$ , создают в пространстве распределение объемной плотности заряда и тока согласно формулам

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (\text{III. 5})$$

где  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  — радиус-вектор  $i$ -го заряда. Функция  $\mathbf{r}_i(t)$  задается в каждом отдельном случае или находится путем решения уравнения движения.

Из уравнений (III. 2) и (III. 3) вытекает уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (\text{III. 6})$$

интегрирование которого по объему приводит к закону сохранения заряда

$$\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (\text{III. 7})$$



Здесь  $Q$  — полный заряд внутри замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей данный объем.

Иногда разложение электромагнитного поля в интеграл Фурье содержит только компоненты с малыми частотами  $\omega \ll \frac{c}{L}$ , где  $L$  — максимальный линейный размер рассматриваемой области пространства. Такое медленно переменное электромагнитное поле внутри данной области называется квазистационарным. Оно описывается уравнениями Максвелла (III.1) — (III.4), в которых слагаемые  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$  и  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  опущены (что эквивалентно пренебрежению эффектами, связанными с конечностью скорости распространения электромагнитного возмущения внутри указанной области). Например, система зарядов  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), движущихся с нерелятивистскими скоростями  $v_i \ll c$  внутри объема с максимальным линейным размером  $l$ , создает в вакууме электромагнитное поле с частотами в интервале  $0 \leq \omega \leq \frac{v_i}{l}$ , которое является квазистационарным в обширной области пространства с линейным размером  $L \ll \frac{c}{v} l$ , где  $v$  — наибольшая скорость этих зарядов.

Векторный потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  квазистационарного магнитного поля описываются теми же уравнениями, что и в магнитоэлектростатике, а время  $t$  входит в них в качестве параметра. Аналогично, скалярный потенциал  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и напряженность  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  электрического поля в квазистационарной области определяются так же, как и в электростатике. В частности, на больших расстояниях  $l \ll r \ll \frac{c}{v} l$  от заряженной системы с максимальным линейным размером  $l$  справедливы формулы (I.14), (II.18) и (II.19), в которых источники поля зависят от времени  $t$  как от параметра.

Дипольный момент, тензор квадрупольного момента и магнитный момент системы движущихся зарядов

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i, \quad D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_{i\alpha}x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad (\text{III. 8})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N e_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i), \quad (\text{III. 9})$$

где радиус-вектор  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$  и скорость  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i(t)$   $i$ -го заряда являются функциями времени.

Электромагнитные поля, распространяющиеся в вакууме при отсутствии зарядов и токов, называются электромагнитными волнами. Они описываются однородными уравнениями Максвелла.

В свободном пространстве однородные уравнения Максвелла сводятся к двум независимым волновым уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{III. 10})$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{III. 11})$$

При этом отбираются лишь такие решения последних уравнений, которые удовлетворяют также однородным уравнениям Максвелла.

Исследование электромагнитных волн в вакууме обычно проводят при помощи электромагнитных потенциалов, которые выбирают так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю  $\phi = 0$ , а векторный потенциал  $\mathbf{A}$  удовлетворял уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{III. 12})$$

и дополнительному условию

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (\text{III. 13})$$

Тогда напряженности электрического и магнитного полей электромагнитной волны выражаются через векторный потенциал следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (\text{III. 14})$$

Электромагнитные волны, которые описываются векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (\text{III. 15})$$

называются плоскими. Они распространяются в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}$ .

Напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей плоской волны равны по модулю  $E = H$  и составляют с вектором  $\mathbf{n}$  правовинтовую тройку

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (\text{III. 16})$$

Плотность потока электромагнитной энергии  $s = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  и плотность импульса  $\mathbf{g} = \frac{1}{c} s$  электромагнитного поля связаны с плотностью энергии  $w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$  в плоской волне соотношениями

$$s = cwn, \quad \mathbf{g} = \frac{1}{c} wn. \quad (\text{III. 17})$$

Электромагнитные волны, у которых зависимость от времени  $t$  описывается простой периодической функцией вида  $\cos(\omega t + \alpha)$ , называются монохроматическими. Величина  $\omega$  представляет собой циклическую частоту (или просто частоту) этих волн. Важным частным случаем таких волн является монохроматическая плоская волна.

Напряженность электрического поля монохроматической плоской волны бывает полезно представить как вещественную часть комплексного выражения

$$\mathbf{E} = \text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}], \quad (\text{III. 18})$$

где  $kr - \omega t$  — фаза волны,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор ( $k = \omega/c$ ),  $\omega$  — циклическая частота (или просто частота) волны, а  $\mathbf{E}_0$  — комплексный вектор, удовлетворяющий условию  $\mathbf{E}_0 \mathbf{k} = 0$  поперечности электромагнитных волн в вакууме. Модуль вектора  $\mathbf{E}_0$  связан с амплитудой волны. Для напряженности магнитного поля рассуждения аналогичны.

От вектора  $\mathbf{E}_0$  отделяют комплексный множитель  $e^{-i\alpha}$  таким образом

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha}, \quad (\text{III. 19})$$

чтобы квадрат вектора

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2, \quad (\text{III. 20})$$

как и сами векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$ , были бы вещественными величинами. Для этого должно выполняться условие  $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = 0$ . Кроме того, вещественные векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  перпендикулярны волновому вектору  $\mathbf{k}$ , указывающему направление распространения волны (III. 18).

Если выбрать ось  $X$  вдоль вектора  $\mathbf{b}_1$ , а ось  $Z$  по направлению распространения волны, то проекции напряженности электрического поля (III. 18) запишутся

$$E_x = b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha), \quad E_y = \pm b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha). \quad (\text{III. 21})$$

Переменные величины  $E_x$  и  $E_y$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{E_x^2}{b_1^2} + \frac{E_y^2}{b_2^2} = 1. \quad (\text{III. 22})$$

Видно, что в каждой точке пространства конец вектора напряженности электрического поля описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Такие волны называются эллиптически-поляризованными. Знаки  $+$  и  $-$  перед коэффициентом  $b_2$  в формуле (III. 21) соответствуют правой и левой поляризациям.

В случае  $b_1 = b_2 = b$  эллипс превращается в окружность, и волна (III. 18) называется поляризованной по кругу или циркулярной. Величина  $b$ , численно равная модулю напряженности электрического поля, является амплитудой этой волны.

Когда один из векторов  $\mathbf{b}_1$  или  $\mathbf{b}_2$  обращается в нуль, волну называют линейно-поляризованной (поляризованной в плоскости). Ее записывают в одном из двух видов

$$\mathbf{E} = I\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha), \quad (\text{III. 23})$$

$$\mathbf{E} = I\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t - \alpha)}, \quad (\text{III. 24})$$

где  $I$  — единичный вектор поляризации,  $E_0$  — амплитуда, а  $\alpha$  — постоянный сдвиг фазы. Физический смысл имеет только вещественная или мнимая часть комплексного выражения (III. 24).

В идеальном случае, когда длина волны бесконечно мала, распространение электромагнитных волн описывается законами геометрической оптики. Если длину волны нельзя рассматривать как бесконечно малую, то наблюдается отклонение от геометрической оптики, а возникающие при этом специфические явления в распространении волн называются дифракцией. Дифракция приводит, например, к размытию резкой границы между светом и тенью за непрозрачным телом (экраном), который находится на пути распространения света. Дифракционные явления заметно различаются между собой в зависимости от расстояний от источника излучения и точки наблюдения до экрана.

Когда источник излучения электромагнитных волн или точка наблюдения или то и другое находятся на

конечном расстоянии от экрана, возникающее дифракционное явление называется дифракцией Френеля.

Если источник излучения электромагнитных волн и точка наблюдения находятся на очень больших (бесконечных) расстояниях от экрана, то имеет место дифракция Фраунгофера.

Дифракция Фраунгофера наблюдается в особо интересном для практических применений случае, когда на пути распространения плоской электромагнитной волны находится плоский экран. Появляющиеся дифрагированные волны легко определить приближенно, если ограничиться малыми отклонениями от геометрической оптики, т. е. малыми углами между направлениями распространения дифрагированной и падающей волн. Ниже рассматривается только этот простейший случай.

Пусть плоский экран совпадает с плоскостью  $XU$  и имеет отверстие площади  $S$ . На него падает монохроматическая плоская волна, которую запишем в комплексном виде (III. 24). Обозначим посредством  $u$  любую из компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  этой волны без временного множителя  $e^{-i\omega t}$ . Поскольку отклонение от геометрической оптики мало, поле в точках отверстия такое же, как и в отсутствии экрана, т. е. описывается величиной  $u = u_0$ , взятой в точках отверстия. Другими словами, поле дифрагированной волны в точках отверстия экрана совпадает с полем падающей плоской волны. В точках на экране дифрагированное поле равно нулю.

В указанных предположениях компонента Фурье дифрагированной волны, рассмотренной в точках отверстия экрана, запишется в виде двукратного интеграла

$$u_q = \int_S u_0 e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dx dy, \quad (\text{III. 25})$$

где интегрирование ведется по поверхности отверстия в экране. Вектор  $\mathbf{q}$  лежит в плоскости  $XU$ . Он связан соотношением  $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$  с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  падающей и дифрагированной волн ( $k = k' = \omega/c$ ). Угол  $\theta$  между волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  называется углом дифракции. Поскольку углы дифракции малы  $\theta \ll 1$ , модуль вектора  $\mathbf{q}$  выражается через частоту падающей волны следующим образом:

$$q = \frac{\omega}{c} \theta. \quad (\text{III. 26})$$

Угловое распределение интенсивности дифрагированной волны в среднем по времени за период колебания

$$dI = \frac{I_0}{S} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} = \frac{I_0}{S} \left( \frac{\omega}{2\pi c} \right)^2 \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 d\Omega. \quad (\text{III. 27})$$

В этой формуле  $S$  — площадь отверстия в экране,  $d\Omega = \theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла, а  $I_0$  — усредненная по времени полная интенсивность падающей монохроматической плоской волны, проходящей через отверстие нормально плоскости экрана.

Дифрагированные волны за экраном можно также определить путем решения волнового уравнения с соответствующими граничными условиями на поверхности экрана и в точках его отверстия.

Два экрана называются дополнительными по отношению друг к другу, если один из них имеет отверстие там, где другой непрозрачен, и наоборот. Для таких экранов справедлив принцип Бабинне: дополнительные экраны дают одинаковые распределения интенсивности дифрагированного света.

## § 1. Уравнение Максвелла

**236.** Может ли существовать внутри поллой области переменное во времени электрическое поле без магнитного?

**237.** Может ли существовать переменное во времени магнитное поле без электрического?

**238.** Может ли существовать однородное электрическое поле при наличии переменного во времени магнитного поля?

**239.** Может ли однородное электрическое (или магнитное) поле быть переменным во времени?

**240.** При выводе закона сохранения электромагнитной энергии как следствия уравнений Максвелла обычно заменяют выражение  $\frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H})$  через  $\text{div } \mathbf{s}$ ,

где  $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  — вектор Пойнтинга. Доказать, что  $\mathbf{s}$  — не единственный вектор, дивергенция которого равна указанному выражению.

**241.** В цилиндрических координатах компоненты вектора напряженности магнитного поля в свободном

пространстве имеют вид  $H_r = H_\varphi = 0$  и  $H_z = H(r, t)$ , где функция  $H(r, t)$  и ее производные ограничены. Определить напряженность  $\mathbf{E}$  вихревого электрического поля, индуцированного данным магнитным полем.

242. Заряд  $Q$  и масса  $m$  однородно заполняют объем шара. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  включается внешнее магнитное поле с напряженностью  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ , которая постоянна по направлению и удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{H}(0) = 0$ . Зависимостью вектора  $\mathbf{H}$  от координат в пределах шара можно пренебречь. Под влиянием магнитного поля шар приходит во вращение. Пренебрегая обратным влиянием вращающегося шара на внешнее магнитное поле, определить угловую скорость  $\omega$  вращения.

243. Доказать, что запаздывающие электромагнитные потенциалы

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

удовлетворяют условию Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Предполагается, что написанные объемные интегралы сходятся.

244. Найти уравнения для скалярного  $\varphi$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов в кулоновской калибровке  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Величины  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  определяются соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

## § 2. Плотность заряда и тока

245. Заряд  $e$  движется в плоскости  $XY$  по прямой  $y = x - l$ , имея постоянную скорость  $\mathbf{v}$  и удаляясь от начала координат. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  он находился на оси  $X$ . Найти распределение объемной

плотности  $\rho$  заряда и объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока в пространстве.

246. Заряд  $e$  совершает гармоническое колебание вдоль оси  $X$  по закону  $x = a \sin \omega t$ . Написать выражение для объемной плотности  $\rho$  заряда и объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока. Проверить справедливость уравнения непрерывности для этих величин. Найти средние по времени за период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  объемные плотности заряда  $\bar{\rho}$  и тока  $\bar{\mathbf{j}}$  и доказать, что

$$\int \bar{\rho} dV = e.$$

247. Заряд  $e$  движется в плоскости  $XY$  по окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  он находился на оси  $X$ . Написать выражение для объемной плотности  $\rho$  заряда и объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока в цилиндрических координатах, начало которых совпадает с центром окружности. Проверить справедливость уравнения непрерывности для величин  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ . Доказать, что средние по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  объемные плотности заряда и тока  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\mathbf{j}}$  удовлетворяют соотношениям

$$\int \bar{\rho} dV = e, \quad \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dz \bar{\mathbf{j}}_\varphi = \frac{e}{T}.$$

248. Равномерно заряженная с линейной плотностью  $q$  окружность радиуса  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего диаметра. Найти распределение объемной плотности  $\rho$  заряда и объемной плотности  $\mathbf{j}$  тока в пространстве в сферических координатах. Начало координат совпадает с центром окружности, а ось  $Z$  направлена по оси вращения. Проверить справедливость уравнения непрерывности для найденных величин.

249. Заряд  $Q$  однородно заполняет объем шара радиуса  $R$ , который вращается вокруг своего неподвижного диаметра с переменной во времени угловой скоростью  $\omega$ . Найти распределение объемных плотностей заряда  $\rho$  и тока  $\mathbf{j}$  в пространстве в сферических координатах.

250. Определить квазистационарное электромагнитное поле заряда  $e$ , который медленно движется с постоянной скоростью  $v$ .



### § 3. Магнитный, дипольный и квадрупольный моменты движущихся зарядов

251. Заряд  $Q$  и масса  $m$  однородно заполняют объем шара радиуса  $R$ , который вращается с произвольной угловой скоростью  $\omega = \omega(t)$  вокруг своего неподвижного центра. Определить магнитный момент  $\mu$  вращающегося шара. Чему равен коэффициент  $\beta$  пропорциональности между магнитным  $\mu$  и механическим  $M$  моментами  $\mu = \beta M$ ?

252. Замкнутая механическая система состоит из двух произвольно движущихся частиц, заряды которых  $e_1$  и  $e_2$ , а массы  $m_1$  и  $m_2$  соответственно. Доказать, что если начало координат выбрано в центре инерции, то магнитный  $\mu$  и механический  $M$  моменты системы пропорциональны друг другу, и найти коэффициент пропорциональности.

253. Механическая система конечного числа частиц с одинаковым отношением заряда к массе движется в пространстве. Какому условию должен удовлетворять полный импульс  $P$  системы, чтобы суммарный магнитный момент всех частиц не зависел от выбора начала координат?

254. Равномерно заряженный тонкий диск радиуса  $R$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг своего неподвижного диаметра. Полный заряд диска  $Q$ . Вычислить магнитный момент  $\mu$  вращающегося диска.

255. Равномерно заряженная с линейной плотностью  $q$  квадратная рамка со стороной  $a$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одной из своих сторон. Вычислить магнитный момент  $\mu$  вращающейся рамки.

256. Нейтрон с магнитным моментом  $\mu_0$  движется по заданной траектории и его радиус-вектор  $\mathbf{r}_n$  меняется со временем как  $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n(t)$ . Определить распределение плотности  $I_n$  магнитного момента в пространстве

$$I_n(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mu(\mathbf{r}, t)}{\Delta V},$$

где  $\Delta \mu(\mathbf{r}, t)$  — магнитный момент элемента объема  $\Delta V$ . Последний в результате предельного перехода  $\Delta V \rightarrow 0$  стягивается к точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

257. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает эллиптическое движение в кулоновском потенциальном поле притяжения  $\alpha/r$ , где  $\alpha < 0$ . Полная энергия частицы равна  $\mathcal{E}$ . Найти средний по времени за период

движения дипольный момент  $\mathbf{d}$  заряда. Выразить его через специфический интеграл движения в кулоновском поле  $\mathbf{I} = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость заряженной частицы, а  $\mathbf{M}$  — ее момент.

258. Радиус-вектор  $\mathbf{r}_d$  точки расположения диполя с моментом  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$  меняется со временем по заданному закону  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_d(t)$ . Определить распределение объемных плотностей заряда и тока в пространстве. Вычислить магнитный момент  $\mu$  найденного тока.

259. Точечный диполь с моментом  $\mathbf{d}$  вращается по окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Окружность лежит в плоскости  $XU$ , а ее центр совпадает с началом координат. Вектор  $\mathbf{d}$  постоянен по модулю и направлен по касательной к окружности в сторону вращения от оси  $X$  к  $U$ . Определить тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента системы.

260. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает эллиптическое движение в кулоновском потенциальном поле  $\alpha/r$ , где  $\alpha < 0$ . Полная энергия и момент частицы равны соответственно  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{M}$ . Начало декартовой системы координат помещено в центр силового поля, а ось  $X$  направлена по большой полуоси эллиптической траектории, лежащей в плоскости  $XU$ . Найти средние по времени за период компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента движущегося заряда.

261. В резерфордской модели атома водорода электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется по эллиптической орбите, имея энергию  $\mathcal{E}$  и момент  $\mathbf{M}$ . Большая полуось  $a$  эллипса совпадает с осью  $X$ , а орбита лежит в плоскости  $XU$ . Определить среднюю за период движения напряженность квазистационарного электрического поля на больших расстояниях  $r \gg a$  от атома с учетом дипольного момента и тензора квадрупольного момента. Исследовать полученный результат в предельном случае, когда эллипс превращается в окружность.

#### § 4. Электромагнитные волны

262. Векторный потенциал плоской линейно-поляризованной волны имеет вид  $\mathbf{A} = lF(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\omega = kc$ ,  $l$  — постоянный вектор, а  $F$  — дифференцируемая функция своего аргумента. В рассматриваемой калибровке электромагнитных потенциалов скалярный потенциал

равен нулю тождественно и  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Определить вектор Пойнтинга  $\mathbf{s}$  и плотность энергии  $\omega$  электромагнитной волны.

**263.** Покоящийся цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $h$  расположен перпендикулярно направлению распространения монохроматической плоской электромагнитной волны, которая описывается векторным потенциалом  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ . Длина волны мала по сравнению с величинами  $R$  и  $h$ , поэтому за цилиндром простирается область тени. На поверхности цилиндра электромагнитная волна полностью поглощается. Определить силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к цилиндру в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

**264.** Монохроматическая плоская электромагнитная волна, описываемая векторным потенциалом  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$ , падает на поверхность неподвижного шара радиуса  $R$  и полностью отражается от этой поверхности. Длина волны мала по сравнению с радиусом  $R$ , поэтому за шаром находится область тени. Определить силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к шару в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

**265.** Линейно-поляризованная и циркулярная волны в комплексном виде записываются так:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}(\mathbf{l}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}), \quad \mathbf{E} = \operatorname{Re}(\mathbf{b}^{(\lambda)} C_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}),$$

где  $\lambda = 1, 2$ ,  $C_0$  — комплексная постоянная,  $\mathbf{l}^{(\lambda)}$  и  $\mathbf{b}^{(\lambda)}$  — единичные векторы поляризации, которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(1)} \mathbf{l}^{(2)} &= 0, & (\mathbf{l}^{(\lambda)})^2 &= 1, & \mathbf{l}^{(\lambda)} &= \mathbf{l}^{(\lambda)*}, \\ \mathbf{b}^{(1)} \mathbf{b}^{(2)} &= 1, & (\mathbf{b}^{(\lambda)})^2 &= 0, & \mathbf{b}^{(1)} &= \mathbf{b}^{(2)*}. \end{aligned}$$

Индекс  $\lambda$  отмечает два независимых состояния поляризации волны, отвечающих одному и тому же волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Доказать, что для линейно-поляризованной и циркулярной волн справедливы следующие правила суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{A} \mathbf{l}^{(\lambda)}) (\mathbf{B} \mathbf{l}^{(\lambda)}) &= \mathbf{A} \mathbf{B} - \frac{1}{k^2} (\mathbf{A} \mathbf{k}) (\mathbf{B} \mathbf{k}), \\ \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{A} \mathbf{b}^{(\lambda)}) (\mathbf{B} \mathbf{b}^{(\lambda)})^* &= \mathbf{A} \mathbf{B}^* - \frac{1}{k^2} (\mathbf{A} \mathbf{k}) (\mathbf{B}^* \mathbf{k}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — произвольные комплексные векторы.

266. Две монохроматические волны  $\mathbf{E}_1 = E_{01} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha_1)$  и  $\mathbf{E}_2 = E_{02} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha_2)$  поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Считая амплитуды этих волн одинаковыми, найти поляризацию результирующей волны.

267. Две монохроматические волны поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в одном направлении. Амплитуды и частоты волн одинаковы, а фазы отличаются на постоянную величину. Определить суммарную волну.

268. Амплитуда правополяризованной круговой волны равна  $A$ , а левополяризованной —  $B$ . Частоты и фазы этих волн одинаковы. Определить поляризацию результирующей волны.

269. Плоскости поляризации двух монохроматических волн

$$\mathbf{E}_1 = E_{01} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha_1), \quad \mathbf{E}_2 = E_{02} \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha_2)$$

наклонены под некоторым углом друг к другу. Определить поляризацию результирующей волны, если  $E_{01} = E_{02}$  и  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$ .

270. Электромагнитная волна получена в результате сложения двух линейно-поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях монохроматических волн  $\mathbf{E}_1 = E_{01} \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})$  и  $\mathbf{E}_2 = E_{02} \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})$ , у которых амплитуды одинаковы, волновые векторы параллельны, а частоты отличаются на малую величину  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ . Векторы  $\mathbf{E}_{01}$ ,  $\mathbf{E}_{02}$  и  $\mathbf{k}$  образуют праввинтовую тройку. Найти поляризацию суммарной волны.

271. Две монохроматические волны, поляризованные по кругу и в противоположные стороны, имеют одинаковые амплитуды и распространяются в одном направлении. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  волн отличаются на малую величину  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$ . Определить поляризацию результирующей волны.

272. Волновой пакет получен суперпозицией монохроматических волн  $l E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$  с частотами в интервале  $0 \leq \omega \leq \infty$ . Направление распространения и вектор поляризации  $l$  этих волн одинаковы, а число волн с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  равно

$$\frac{2}{\sqrt{\pi} \Delta} e^{-(\omega/\Delta)} d\omega,$$

где  $\Delta$  — постоянная, не зависящая от частоты. Выражение, стоящее множителем перед дифференциалом  $d\omega$ , является функцией распределения данных монохроматических волн по частотам. Найти напряженность электрического поля волнового пакета как функцию координат и времени.

273. Волновой пакет получен путем наложения монохроматических волн  $E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$  с частотами, изменяющимися в пределах от  $\omega_0$  до  $\omega_0 + \Delta$ , где  $\Delta \ll \omega_0$ . Направление распространения и вектор поляризации  $\mathbf{l}$  этих волн одинаковы, а амплитуда группы волн с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  равна  $\frac{E_0}{2\omega_0} d\omega$ . Здесь  $E_0$ ,  $\omega_0$  и  $\Delta$  — постоянные, не зависящие от частоты  $\omega$ . Определить напряженность электрического поля волнового пакета как функцию координат и времени.

274. Напряженность электрического поля волнового пакета имеет постоянное направление и описывается функцией  $\mathbf{E} = \mathbf{E} \left( t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c} \right)$ , которая отлична от нуля для конечной области изменения своего аргумента. Здесь  $\mathbf{n}$  — постоянный единичный вектор, а  $c$  — скорость света. Разлагая заданную функцию в интеграл Фурье, представить волновой пакет как суперпозицию монохроматических волн.

275. Напряженность электрического поля электромагнитной волны задана

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\tau} \left| t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}}{c} \right|},$$

где векторы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{n}$ , а также величина  $\tau$  постоянны, причем  $\tau > 0$ . Определить компоненту Фурье  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  данной функции.

276. Компонента Фурье  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  напряженности электрического поля имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}_0 \frac{(2\pi)^4}{\omega_0} \delta \left( \mathbf{k} - \frac{\omega \mathbf{n}}{c} \right) e^{-(\omega/\omega_0)^2},$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{n}$  — постоянные векторы. Определить напряженность электрического поля как функцию координат и времени.

277. Электростатическое поле описывается сферически-симметричным потенциалом  $\varphi = \frac{e}{r} e^{-r/a}$ , где  $a$  —

положительная постоянная. Представить напряженность  $\mathbf{E}$  этого поля в виде разложения

$$\mathbf{E} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

по продольным волнам  $\mathbf{E}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , векторы поляризации которых направлены вдоль  $\mathbf{k}$ .

278. Две конические поверхности вставлены одна в другую и имеют общую вершину и ось симметрии. По внешней конической поверхности по направлению к вершине бежит волна тока  $J = J_0 \cos(\omega t + kr)$ , которая затем переходит на внутреннюю коническую поверхность и уходит на бесконечность. Здесь  $J$  — суммарный поверхностный ток,  $\omega = kc$ , а  $r$  — расстояние от вершины до точки наблюдения на конической поверхности. Определить вихревое электромагнитное поле в пространстве между коническими поверхностями. Принять, что радиальная компонента искомого вектора  $\mathbf{E}$  равна нулю тождественно.

279. По оси бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  течет линейный ток  $J = J_0 \cos(\omega t - kz)$ . Полный поверхностный ток, текущий по самой цилиндрической поверхности, представляет собой обратную волну вида  $J = J_0 \cos(\omega t + kz)$ . Определить вихревое электромагнитное поле внутри и снаружи цилиндрической поверхности. Принять, что искомым вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен оси  $Z$  и  $\omega = kc$ .

## § 5. Дифракция

280. Электромагнитная волна, напряженность электрического поля которой  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ , падает в нормальном направлении на плоский экран, имеющий бесконечную щель ширины  $2a$ . Вектор поляризации  $\mathbf{E}$  параллелен щели. Считая отклонение от геометрической оптики малым  $ka \gg 1$ , определить электрическое поле дифрагированной волны, распространяющейся под малыми углами дифракции. Найти приходящуюся на единицу длины интенсивность  $dI$  рассеяния этой волны в интервале углов  $d\theta$  в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

281. В плоском экране прорезаны  $N$  одинаковых бесконечных параллельных щелей ширины  $2a$ . Расстояние

между осевыми линиями соседних щелей  $2b$ . На экран в нормальном направлении падает плоская электромагнитная волна  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Вектор поляризации  $\mathbf{I}$  параллелен щелям. Длина волны мала по сравнению с характерными размерами  $ka \gg 1$  и  $kb \gg 1$ , так что углы дифракции также малы. Определить электрическое поле дифрагированной волны и отнесенную к единице длины интенсивность  $dI$  рассеяния этой волны в интервале углов  $d\theta$  в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

282. Плоский экран имеет прямоугольное отверстие со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Монохроматическая плоская электромагнитная волна частоты  $\omega = kc$  падает нормально к плоскости экрана. Вектор поляризации параллелен одной из сторон прямоугольного отверстия, а длина волны мала по сравнению с характерными размерами  $ka \gg 1$  и  $kb \gg 1$ . Определить интенсивность  $dI$  дифрагированной волны в телесном угле  $d\Omega$  в среднем по времени за период колебания волны.

283. Линейно-поляризованная плоская электромагнитная волна частоты  $\omega = kc$  падает нормально к плоскости бесконечного экрана, имеющего круглое отверстие радиуса  $R$ . Длина волны мала по сравнению с радиусом  $kR \gg 1$ , так что углы дифракции также малы. Определить интенсивность  $dI$  дифрагированной волны в телесном угле  $d\Omega$  в среднем по времени за период колебания волны.

284. Плоский экран имеет кольцевое отверстие радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Определить среднюю по времени интенсивность  $dI$  дифрагированной волны в телесном угле  $d\Omega$  при нормальном падении плоской линейно-поляризованной электромагнитной волны на кольцевое отверстие. Длина волны мала по сравнению с радиусами и углы дифракции также малы.

285. Плоский экран имеет эллиптическое отверстие с полуосями  $a$  и  $b$ . Плоская электромагнитная волна частоты  $\omega = kc$  падает нормально к плоскости экрана. Длина волны мала по сравнению с полуосями эллиптического отверстия  $ka \gg 1$  и  $kb \gg 1$ . Определить интенсивность  $dI$  дифрагированной волны в телесном угле  $d\Omega$  в среднем по времени за период колебания волны.

286. Определить среднюю по времени интенсивность  $dI$  дифрагированного света в интервале углов  $d\theta$  при

---

нормальном падении плоской электромагнитной волны частоты  $\omega = kc$  на пластину бесконечной длины и ширины  $2a$ . Вектор поляризации параллелен пластине, а длина волны мала по сравнению с шириной пластины  $ka \gg 1$ .

287. Шар радиуса  $R$ , являющийся абсолютно черным телом, находится в электромагнитном поле плоской линейно-поляризованной волны частоты  $\omega = kc$ . Длина волны мала по сравнению с радиусом  $kR \gg 1$ . Определить среднюю по времени интенсивность  $dI$  дифрагированной волны в телесном угле  $d\Omega$ .



## Г л а в а IV

### ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯДАМИ

Задачу об излучении электромагнитных волн удобно решать, вводя в рассмотрение электромагнитные потенциалы  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$ , которые определяются соотношениями

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (\text{IV. 1})$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (\text{IV. 2})$$

Величины  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  определены неоднозначно. Переход от электромагнитных потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  к новым  $\mathbf{A}'$  и  $\varphi'$  при помощи преобразования калибровки:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f, \quad (\text{IV. 3})$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (\text{IV. 4})$$

не изменяет напряженности электрического и магнитного полей. Здесь  $f = f(\mathbf{r}, t)$  — произвольная функция. Обычно ее выбирают так, чтобы выполнялось условие Лоренца

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (\text{IV. 5})$$

Тогда уравнения для электромагнитных потенциалов, вытекающие из уравнений Максвелла, принимают простой вид:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{IV. 6})$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (\text{IV. 7})$$

и называются уравнениями Даламбера. Физический смысл имеют только те решения уравнений Даламбера, которые удовлетворяют условию Лоренца (IV.5).

Излучение электромагнитных волн описывается решениями уравнений (IV.6) и (IV.7) в виде запаздывающих потенциалов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (\text{IV. 8})$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (\text{IV. 9})$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор элемента объема  $dV'$ , а  $t$  — время наблюдения.

На больших расстояниях от заряженной системы каждый весьма малый элемент поверхности сферической волны можно рассматривать как плоскую волну, в которой напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей равны по модулю и образуют правовинтовую тройку векторов с направлением  $\mathbf{n}$  распространения волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (\text{IV. 10})$$

Таким образом, для определения электромагнитного поля излучения достаточно вычислить напряженность только магнитного поля, которая связана с векторным потенциалом (IV.8) соотношением (IV.1).

Поместим начало координат внутри заряженной системы, максимальный линейный размер которой обозначим через  $l$ . На больших расстояниях  $r \gg l \gg r'$  имеем  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n}\mathbf{r}'$  и векторный потенциал (IV.8) приближенно запишется как

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) dV', \quad (\text{IV. 11})$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Далее предположим, что излучение происходит в основном на частоте  $\omega$ , причем длина излучаемой волны (деленная на  $2\pi$ ) велика по сравнению с линейным размером источника  $\lambda = \frac{c}{\omega} \gg l$ . Кроме того, исследование электромагнитного поля будем проводить на больших

расстояниях в волновой зоне

$$r \gg \lambda \gg l.$$

В этих предположениях подынтегральное выражение в (IV.11) можно разложить в ряд по переменной  $\frac{nr'}{c}$ , что соответствует разложению векторного потенциала в ряд по малому параметру  $l/\lambda$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2r}, \quad (\text{IV. 12})$$

где вектор  $\mathbf{D}$  имеет компоненты

$$D_{\alpha} = D_{\alpha\beta} n_{\beta}.$$

В формуле (IV.12) второе и третье слагаемые численно одного порядка, а в совокупности меньше первого члена в отношении  $l/\lambda$ . Слагаемые более высокого порядка малости отброшены. Дипольный момент  $\mathbf{d}$ , магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  и тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента зависят от времени с учетом запаздывания

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}\left(t - \frac{r}{c}\right), \quad D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (\text{IV. 13})$$

Применительно к заряду, движущемуся неравномерно с нерелятивистской скоростью  $v$ , сумма (IV.12) представляет собой разложение по параметру  $\frac{v}{c} \ll 1$ .

Вычисляя ротор от выражения (IV.12) и отбрасывая малые члены, пропорциональные  $1/r^2$ , получаем напряженность магнитного поля излучаемой волны

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2r} + \frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}}{c^2r} + \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3r}. \quad (\text{IV. 14})$$

В каждой точке волновой зоны поток электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{cH^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (\text{IV. 15})$$

Электромагнитная энергия  $I$ , излученная источником в единицу времени (интенсивность излучения), равна потоку вектора Пойнтинга через сферу большого радиуса  $r$  с центром в начале координат

$$I = \frac{c}{4\pi} \int H^2 r^2 d\Omega. \quad (\text{IV. 16})$$

Используя формулы (IV.14) и (IV.16), нетрудно получить для интенсивности излучения  $I$  следующее выражение:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\mathbf{m}}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5}. \quad (\text{IV. 17})$$

Первое, второе и третье слагаемые представляют собой интенсивности дипольного, магнитно-дипольного и квадрупольного излучений. Слагаемые, описывающие излучение мультипольных моментов более высокого порядка, отброшены. При сохранении указанных членов получим бесконечный быстро сходящийся ряд, отдельные слагаемые которого в общем случае зависят от выбора начала координат. Поэтому необходимо указывать координатную систему, в которой определены дипольный, магнитно-дипольный и квадрупольный моменты, которые входят в формулу (IV.17). Обычно начало координат выбирают в физически выделенной точке заряженной системы, например, в ее центре инерции или точке симметрии, а также в центре вращения зарядов.

Поскольку суммарная интенсивность излучения (IV.16) представляет собой поток электромагнитной энергии через сферу большого радиуса  $r$  с центром в начале координат, численное значение этой величины также меняется при сдвиге начала координат в связи с изменением положения указанной сферы относительно излучающей системы. Однако полная излученная энергия

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt \quad (\text{IV. 18})$$

не зависит от сдвига начала координат внутри излучающей системы.

Обычно векторы  $\boldsymbol{\mu}$  и  $\frac{1}{c} \mathbf{D}$  по модулю меньше  $|\mathbf{d}|$  по порядку величины в  $l/\lambda$  (или  $v/c$ ) раз. Тогда второе и третье слагаемые в формуле (IV.14) являются малыми поправками при вычислении напряженности магнитного поля в волновой зоне. Однако второе и третье слагаемые в формуле (IV.17) в этом случае следует опустить, дабы не превысить выбранную точность вычисления. Чтобы определить первую поправку к дипольному излучению, необходимо магнитное поле

вычислить с большей точностью, сохранив в формуле (IV.14) отброшенный член порядка  $l^2/c^2$  (или  $v^2/c^2$ ). Тогда к сумме (IV.17) добавится еще одно слагаемое, которое по порядку величины равно интенсивностям магнитно-дипольного и квадрупольного излучений (см. задачи 349 и 350).

Если дипольное излучение системы по каким-либо причинам ослаблено и по порядку величины значительно меньше магнитно-дипольного и квадрупольного, то второе и третье слагаемые в формуле (IV.17) являются главными членами, а вместе с первым описывают излучение системы с определенной точностью. Опущенные члены представляют собой малые поправки более высокого порядка. Последнее утверждение, вообще говоря, справедливо и в том случае, когда все три слагаемые (IV.17) по величине одного порядка. Некоторые слагаемые суммы (IV.17) могут обращаться в нуль.

Полную энергию (IV.18), излученную за все время действия источника, можно представить в виде суммы энергий, излученных на разных частотах

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega, \quad (\text{IV. 19})$$

где  $\mathcal{E}(\omega)$  — спектральная плотность излучения, т. е. энергия, приходящаяся на единичный интервал частот. Она характеризует спектральный состав излучения. График функции  $\mathcal{E}(\omega)$  называется спектральной линией излучения.

Чтобы определить спектральную плотность  $\mathcal{E}(\omega)$  излучения заданного источника, необходимо величины, входящие в интенсивность излучения (IV.17), разложить в интеграл Фурье. Тогда энергия  $d\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}(\omega)d\omega$ , излученная в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , запишется в виде \*)

$$d\mathcal{E}_\omega = \left( \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2|\ddot{\mathbf{\mu}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\ddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5} \right) d\omega, \quad (\text{IV. 20})$$

---

\*) Между компонентами Фурье  $f(\omega)$  и  $\dot{f}(\omega)$  функции  $f(t)$  и ее производной  $\dot{f}(t)$  существует соотношение  $\dot{f}(\omega) = -i\omega f(\omega)$ . Аналогично,  $\ddot{f}(\omega) = -\omega^2 f(\omega)$  и  $\ddot{f}(\omega) = i\omega^3 f(\omega)$ .

где  $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ ,  $\ddot{\mu}(\omega)$  и  $\ddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)$  — компоненты Фурье соответствующих величин  $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ ,  $\ddot{\mu}(t)$  и  $\ddot{D}_{\alpha\beta}(t)$ , а выражение в круглых скобках представляет собой искомую функцию  $\mathcal{E}(\omega)$ .

Например, энергия, излученная на малых частотах  $\omega\tau \ll 1$  зарядом  $e$  во внешнем силовом поле,

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^2(v_2 - v_1)^2}{3\pi c^3} d\omega.$$

В этой формуле  $\tau$  — порядок величины времени взаимодействия заряда с внешним полем, а  $v_1$  и  $v_2$  — его скорости до и после этого взаимодействия.

Когда в некоторой точке волновой зоны заданы напряженности электрического  $\mathbf{E}(t)$  или магнитного  $\mathbf{H}(t)$  полей, тогда энергия  $\mathcal{E}(\omega)$ , проходящая в нормальном направлении через единицу площади в единичном интервале частот, определяется при помощи соотношения

$$\frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(t) dt = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega. \quad (\text{IV. 21})$$

График этой функции  $\mathcal{E}(\omega)$  представляет собой спектральную линию данного излучения.

Интенсивностью  $dI$  излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  называется энергия, протекая в единицу времени через элемент  $dS = r^2 d\Omega$  сферической поверхности большого радиуса  $r$ , центр которой расположен в начале координат. Вычисляя поток вектора Пойнтинга (IV. 15) через указанный элемент сферической поверхности, находим угловое распределение интенсивности излучения

$$dI = \frac{cH^2 r^2}{4\pi} d\Omega, \quad (\text{IV. 22})$$

где напряженность магнитного поля определяется выражением (IV. 14). Если дипольное излучение не ослаблено, то после возведения в квадрат суммы (IV. 14) следует опустить слагаемые, имеющие порядок величины  $l^2/\kappa^2$  (или  $v^2/c^2$ ), чтобы не превышать принятую точность вычисления.

Формула (IV. 22) заметно упрощается, когда излучающая система характеризуется только одним диполь-

ным моментом, магнитным моментом или тензором квадрупольного момента, и принимает вид соответственно

$$dI_d = \frac{(\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \quad (\text{IV. 23})$$

$$dI_\mu = \frac{(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} d\Omega, \quad (\text{IV. 24})$$

$$dI_D = \frac{(\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n})^2}{144\pi c^5} d\Omega. \quad (\text{IV. 25})$$

Угловое распределение полной энергии, излученной за время действия источника, получим путем интегрирования интенсивности излучения (IV. 22) по времени

$$d\mathcal{E}_n = \frac{cr^2}{4\pi} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} H^2(\mathbf{r}, t) dt. \quad (\text{IV. 26})$$

Разлагая в этой формуле напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  магнитного поля в интеграл Фурье по переменной  $t$ , нетрудно определить энергию  $d\mathcal{E}_{n\omega}$ , излученную в телесный угол  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ :

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega d\omega. \quad (\text{IV. 27})$$

При помощи формулы (IV.14) компонента Фурье  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  напряженности магнитного поля в (IV.27) представляется в виде суммы слагаемых, относящихся к дипольному, магнитно-дипольному и квадрупольному излучениям. Однако после возведения в квадрат указанной суммы необходимо отбросить члены порядка величины  $l^2/c^2$  (или  $v^2/c^2$ ), когда дипольное излучение не подавлено.

Если электрон находится в поле электромагнитной волны, то в нерелятивистском случае на него действует сила  $e\mathbf{E}$ . Слагаемым  $\frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$  можно пренебречь. Под действием этой силы электрон приобретает ускорение  $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$  и, следовательно, излучает. Угловое распределение дипольного излучения электрона, совершающего колебание в поле монохроматической волны, дается формулой (IV.22). В результате такого излучения будет происходить рассеяние падающей волны на свободном

электроне. Этот процесс характеризуется эффективным сечением  $d\sigma$  рассеяния в телесный угол  $d\Omega$ :

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\bar{s}}, \quad (\text{IV. 28})$$

где  $s$  — модуль вектора Пойнтинга падающей волны, а черта над буквами означает усреднение по времени за период колебания этой волны.

На излучающую заряженную частицу действует со стороны излучаемого электромагнитного поля тормозящая сила, которую называют силой радиационного трения. При этом энергетические потери частицы на излучение можно рассматривать как результат преодоления указанной силы трения, возникающей в процессе излучения. Сила радиационного трения в нерелятивистском случае имеет вид

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (\text{IV. 29})$$

где  $e$  и  $\mathbf{r}$  — заряд и радиус-вектор движущейся частицы. Эта сила мала по сравнению с внешней силой, действующей на частицу.

Учет обратного влияния излучения на движение заряженной частицы следует проводить, когда излучение происходит с большой интенсивностью на протяжении весьма продолжительного (бесконечного) промежутка времени. Такой учет осуществляется двояко. Первый путь состоит в прибавлении силы радиационного трения (IV. 29) к внешней силе  $\mathbf{F}$  в уравнении движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}. \quad (\text{IV. 30})$$

В этом случае интенсивность, спектральный состав и угловое распределение излучения вычисляются по формулам (IV. 16)—(IV. 27), в которых функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  является решением уравнения (IV. 30).

Вторым способом служит использование закона сохранения энергии, согласно которому убыль энергии  $\mathcal{E}$  заряженной частицы во внешнем постоянном силовом поле  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$  происходит за счет излучения

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I, \quad (\text{IV. 31})$$

где величина  $\mathcal{E}$  складывается из кинетической и потенциальной энергии частицы, а интенсивность излучения  $I$  дается формулой (IV. 17). Уравнение (IV. 31) справедливо



ливо лишь в первом отличном от нуля приближении (без учета эффектов, связанных с запаздыванием излученного электромагнитного сигнала внутри области движения заряда). В отличие от предыдущего случая радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  заряженной частицы, входящий в выражение для интенсивности излучения, здесь берется из уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (\text{IV. 32})$$

без учета силы радиационного трения. Последняя привносит в соотношение (IV.31) пренебрежимо малую поправку. Уравнение движения (IV.32) дает возможность выразить правую часть равенства (IV.31) через энергию  $\mathcal{E}$  и таким образом позволяет получить дифференциальное уравнение относительно этой величины. Полученное дифференциальное уравнение описывает убыль энергии частицы в результате длительного излучения.

### § 1. Дипольное излучение

**288.** Через конденсатор пролетела частица с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Расстояние между обкладками конденсатора равно  $l$ , а напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля в нем однородна и постоянна. Угол между вектором  $\mathbf{E}$  и направлением скорости  $\mathbf{v}_0$  частицы при влете равнялся  $\alpha$ . Знаки заряда  $e$  и косинуса угла  $\alpha$  одинаковы. Найти энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую частицей на дипольное излучение во время пролета через конденсатор.

**289.** Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает по диаметру шара радиуса  $R$ , внутри которого равномерно распределен заряд  $Q$ . Заряды частицы и шара противоположного знака. Перед влетом в шар частица имела кинетическую энергию  $\mathcal{E}_0$ . Определить энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую частицей на дипольное излучение во время пролета через шар.

**290.** Напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля в полупространстве однородна, постоянна и направлена параллельно граничной плоскости. В это полупространство влетает протон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Скорость  $\mathbf{v}$  протона при влете перпендикулярна граничной плоскости. Определить энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую протоном на дипольное излучение за время движения в магнитном поле.

**291.** Протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в скрещенных электрическом и магнитном полях с напряжен-

ностями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , которые удовлетворяют условиям  $\mathbf{E}\mathbf{H} = 0$  и  $E \ll H$ . Внешние поля однородны и постоянны, а протон в начальный момент времени  $t_0 = 0$  имел скорость  $v_0$ . Определить энергию дипольного излучения, теряемую частицей за время  $t$ .

292. Простейшая линейная антенна представляет собой тонкий прямолинейный провод длины  $l$ , по которому течет ток  $I = I_0 \cos \omega t$ . Определить интенсивность  $I$  длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока.

293. Под влиянием упругой силы частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  может совершать гармонические колебания с частотой  $\omega_0$  (так называемый осциллятор). Учитывая силу радиационного трения, определить среднюю по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность  $I$  излучения осциллятора, совершающего установившиеся вынужденные колебания во внешнем электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ .

294. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает на большом расстоянии  $l$  от неподвижного ядра с зарядом  $Z|e|$ . В бесконечно удаленный момент времени  $t = -\infty$  электрон имел скорость, по абсолютной величине равную  $v_0$ . Пренебрегая искривлением траектории, найти энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую электроном на дипольное излучение за все время полета.

295. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает на большом расстоянии  $l$  от диполя с моментом  $\mathbf{d}$ , который покоится в некоторой точке пространства. На бесконечности частица имела скорость  $v_0$ . Считая приближенно траекторию прямолинейной, определить полную энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую частицей на дипольное излучение в двух случаях: а) дипольный момент  $\mathbf{d}$  параллелен начальной скорости  $\mathbf{v}_0$  частицы; б) дипольный момент  $\mathbf{d}$  перпендикулярен начальной скорости  $\mathbf{v}_0$  и лежит в плоскости движения частицы.

296. Полный заряд и дипольный момент покоящегося возбужденного атома равны нулю, а компоненты тензора квадрупольного момента имеют вид  $D_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$  и  $D_{11} = D_{22} = -1/2 D$ . В плоскости  $XY$  на большом расстоянии  $l$  от атома пролетает электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . В бесконечно удаленный момент времени  $t = -\infty$  он имел скорость по абсолютной величине, равную  $v_0$ . Считая приближенно траекторию прямолинейной и пренебрегая поляризуемостью атома под действием

пролетающего электрона, определить полную энергию  $\mathcal{E}$ , потерянную электроном на излучение.

297. В результате деления ядро раскалывается на два осколка с массовыми числами  $A_1$  и  $A_2$  и зарядами  $Z_1e$  и  $Z_2e$ . В системе центра инерции суммарная кинетическая энергия обоих осколков на бесконечности  $\mathcal{E}_0$ . Масса нуклона  $m$ . Вычислить полную энергию  $\mathcal{E}$  дипольного излучения, обусловленного кулоновским взаимодействием разлетающихся осколков ядра. Принять, что осколки движутся согласно законам классической механики, начиная свое движение из тех точек пространства, где их относительная скорость равнялась нулю.

298. Протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Его кинетическая энергия в начальный момент времени  $t_0 = 0$  равнялась  $\mathcal{E}_0$ . Найти закон убывания кинетической энергии  $\mathcal{E}$ , обусловленный дипольным излучением.

299. Во внешнем потенциальном поле частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает одномерное гармоническое колебание с частотой  $\omega$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  ее полная энергия равнялась  $\mathcal{E}_0$ . Не прибегая к явному выражению для силы радиационного трения, определить усредненный по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$  закон убывания полной энергии  $\mathcal{E}$  частицы, обусловленный дипольным излучением. Принять, что в каждый момент времени отклонения от гармонического режима колебания пренебрежимо мало  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \ll \omega\mathcal{E}$ . Поэтому при усреднении медленные функции времени можно рассматривать как постоянные.

300. В классической модели атома, предложенной Резерфордом, электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом  $Z|e|$ . Найти закон убывания полной энергии  $\mathcal{E}$  электрона, обусловленный дипольным излучением. Вычислить время  $t_n$ , по истечении которого электрон упадет на ядро вследствие потери энергии на дипольное излучение. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  электрон находился на расстоянии  $R$  от ядра.

301. Модель атома водорода, предложенная Дж. Дж. Томсоном, представляет собой неподвижный однородно заряженный шар радиуса  $R$  с полным положительным зарядом  $|e|$ . Внутри шара движется точечный

электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Чему равна частота  $\omega$  электромагнитной волны, излучаемой такой системой? Предполагая, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  электрон покоился на расстоянии  $R$  от центра шара, определить усредненный по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$  закон убывания полной энергии  $\mathcal{E}$  электрона, обусловленный силой радиационного трения. При усреднении медленные функции времени следует рассматривать как постоянные.

**302.** Доказать, что у замкнутой системы заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе дипольное излучение отсутствует.

**303.** Электронный газ плотности  $N_0$  находится во внешнем однородном постоянном магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Распределение электронов по кинетическим энергиям поступательного движения описывается распределением Максвелла, а среднее расстояние между электронами велико по сравнению с длиной излучаемой волны. Определить обусловленную внешним магнитным полем интенсивность  $I$  излучения единицы объема электронного газа.

**304.** Две частицы с одинаковой массой  $m$  скреплены между собой жестким стержнем длины  $l$ , массой которого можно пренебречь. Заряды частиц одинаковы по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Напряженность  $\mathbf{E}$  внешнего электрического поля однородна, постоянна и направлена от отрицательного заряда в сторону положительного. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  стержень покоился и образовывал с вектором  $\mathbf{E}$  малый угол  $\psi_0 \ll 1$ . Определить интенсивность  $I$  дипольного излучения системы двух зарядов.

**305.** Расстояние  $a$  между двумя одинаковыми параллельными диполями с моментами  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$  по порядку величины равно длине излучаемой волны  $a \sim c/\omega = \lambda$ . Постоянный вектор  $\mathbf{d}_0$  параллелен прямой, соединяющей диполи. Найти интенсивность  $I$  излучения системы двух диполей в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ . Исследовать предельный случай  $a \ll \lambda$ .

**306.** Система, состоящая из большого числа  $N$  параллельных точечных диполей, занимает область пространства, линейные размеры которой ничтожно малы по сравнению с основными длинами излучаемых волн. Частоты колебания диполей разбросаны вблизи некоторой частоты  $\omega$  так, что суммарный момент диполей с частотой

тами в интервале от  $\omega + \varepsilon$  до  $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$  равен  $d_0 f(\varepsilon) \cos(\omega + \varepsilon) t d\varepsilon$ , где вектор  $d_0$  постоянен, а функция распределения  $f(\varepsilon)$  имеет вид  $f(\varepsilon) = \frac{NT_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2 T_0^2}$ . Величины  $T_0$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют неравенствам  $N \gg \omega T_0 \gg 1$  и  $-\infty \leq \varepsilon \leq \infty$ . Определить интенсивность  $I$  излучения системы в среднем по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$ , а также полную энергию  $\mathcal{E}$  дипольного излучения за бесконечное время  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

307. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает эллиптическое движение внутри шаровой области, однородно заполненной положительным зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . В начальный момент времени электрон находился в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ , имея скорость  $\mathbf{v}_0$ . Определить энергию  $\mathcal{E}$ , теряемую электроном на дипольное излучение за период движения.

308. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется по эллиптической орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом  $Z|e|$ . Полная энергия и механический момент электрона равны соответственно  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{M}$ . Определить энергию  $\mathcal{E}_d$ , теряемую электроном на дипольное излучение за период движения.

309. Положительно заряженная частица с массой  $m_1$  и зарядом  $e_1$  пролетает с прицельным расстоянием  $l$  мимо атомного ядра с массой  $m_2$  и зарядом  $e_2$ . Скорость частицы относительно ядра на бесконечно большом расстоянии от него равнялась  $\mathbf{v}_0$ . Определить энергию  $\mathcal{E}_d$ , теряемую частицей на дипольное излучение за все время пролета около ядра.

310. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в потенциальном поле  $U = \alpha/r^2$ , где постоянная  $\alpha$  положительна. Полная энергия и момент частицы равны соответственно  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{M}$ . Определить энергию  $\mathcal{E}_d$ , теряемую частицей на дипольное излучение за бесконечное время движения от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ .

311. Поток одинаковых частиц с массой  $m$  и зарядом  $e$  рассеивается сферически-симметричным потенциальным полем отталкивания  $U = U(r)$ . Скорость каждой налетающей частицы на бесконечно большом расстоянии от силового центра равна  $\mathbf{v}_0$ . Найти эффективное излучение

$$\kappa = \int_0^\infty \Delta \mathcal{E} \cdot 2\pi l \, dl,$$

где  $\Delta\mathcal{E}$  — полная энергия дипольного излучения частицы, пролетающей с прицельным расстоянием  $l$ . Представить величину  $\kappa$  в виде двойного интеграла.

## § 2. Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения

312. Нейтрон, имеющий внутренний магнитный момент  $\mu$ , влетает в однородное постоянное магнитное поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Внутренний механический момент  $\mathbf{M}$  нейтрона связан с магнитным соотношением  $\mu = -\beta\mathbf{M}$ , а угол между векторами  $\mu$  и  $\mathbf{H}$  при влете равнялся  $\theta_0$ . Найти интенсивность  $I$  излучения.

313. Простейшая рамочная антенна представляет собой прямоугольную рамку со сторонами  $a$  и  $b$ , по которой течет линейный ток  $J = J_0 \cos \omega t$ . Определить интенсивность  $I$  длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока.

314. Тонкая однородная спица из ферромагнетика длины  $l$  имеет массу и магнитный момент на единицу длины, равные соответственно  $m_l$  и  $\mu_l$ . В начальный момент времени спица покоилась и образовывала малый угол  $\psi_0$  с направлением внешнего постоянного однородного магнитного поля с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Определить интенсивность  $I$  излучения.

315. При каком условии интенсивность магнитно-дипольного излучения не зависит от выбора начала координат?

316. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется во внешнем постоянном однородном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ . Представить интенсивность  $I$  магнитно-дипольного излучения как функцию скорости  $\mathbf{v}$  электрона и напряженности электрического поля.

317. Шар радиуса  $R$  совершает малые крутильные колебания около своей оси симметрии с частотой  $\omega_0$ . Максимальный угол поворота  $\psi_0$ . Заряд  $Q$  и масса распределены по объему шара равномерно. Определить среднюю по времени за период колебания интенсивность  $I$  излучения шара.

318. Однородный шар радиуса  $R$  вращается около своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Ось вращения наклонена под углом  $\theta$  к направлению внешнего постоянного однородного магнитного поля с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Полные заряды и масса шара равны  $Q$  и  $m$ . Определить интенсивность  $I$  излучения.

319. По тонкому однородному кольцу радиуса  $R$  и массы  $m$  течет постоянный ток  $J$ . В начальный момент времени ось кольца составляла малый угол  $\psi_0$  с направлением внешнего постоянного однородного магнитного поля с напряженностью  $H$  ( $\psi_0 \ll 1$ ). Ток  $J$  течет по часовой стрелке, если смотреть по направлению вектора  $H$ . Найти интенсивность  $I$  излучения.

320. В тонкой неподвижной квадратной рамке со стороной  $l$  возбужден ток  $J = J_0 e^{-at^2}$ . Определить полную энергию  $\mathcal{E}$  длинноволнового излучения за время  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

321. Два одинаковых заряда величины  $e$  совершают плоское движение. Их полярные координаты  $r_1, \psi_1, r_2$  и  $\psi_2$  меняются со временем по закону

$$r_1 = r_2 = a\dot{\psi}^2, \quad \psi_1 = \psi(t), \quad \psi_2 = \pi + \psi(t),$$

где  $a$  — положительная постоянная, а  $\psi(t)$  — монотонная функция, заключенная в пределах  $0 \leq \psi(t) \leq \pi$ . Определить интенсивность магнитно-дипольного излучения такой системы.

322. Возможно ли магнитно-дипольное излучение в моделях атома водорода, предложенных Резерфордом и Дж. Дж. Томсоном (см. задачи 300 и 301)?

323. Доказать, что в отсутствие внешнего поля интенсивность магнитно-дипольного излучения двух взаимодействующих между собой заряженных частиц равна нулю, если начало координат выбрано в центре инерции этих частиц.

324. Замкнутая система состоит из конечного числа частиц с одинаковым отношением заряда к массе. Доказать, что магнитно-дипольное излучение у такой системы отсутствует.

325. Система частиц с одинаковым отношением заряда к массе, равным  $e/m$ , совершает финитное движение во внешнем центрально-симметричном поле, которое создается некоторой неподвижной частицей. В пространстве включено слабое однородное постоянное магнитное поле с напряженностью  $H$ . Определить напряженности электрического  $E_M$  и магнитного  $H_M$  полей магнитно-дипольного излучения в волновой зоне, а также частоту излучаемых волн.

326. Расстояние между магнитными моментами  $\mu_1 = \mu_0 \cos \omega t$  и  $\mu_2 = \mu_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t + \alpha]$  мало по сравнению с длинами излучаемых волн. Частоты колебания

удовлетворяют условию  $\Delta\omega \ll \omega$ , а величины  $\mu_0$  и  $\alpha$  постоянны. Найти интенсивность  $I$  излучения этой системы в среднем по времени от  $t$  до  $t + T$ , где  $T = 2\pi/\omega$  — период быстрых колебаний.

327. Система  $N$  магнитных моментов занимает область пространства, линейные размеры которой ничтожно малы по сравнению с длинами излучаемых волн. Магнитные моменты описываются формулой  $\mu_n = \mu_0 \cos[(\omega + n\varepsilon)t]$ , где вектор  $\mu_0$  постоянен, а число  $n$  принимает значение  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Разброс частот колебания мал по сравнению с основной частотой  $\varepsilon N \ll \omega$ . Определить интенсивность  $I$  излучения системы в среднем по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$ .

328. Совокупность большого числа  $N$  маленьких замкнутых контуров с переменным током образует излучающую систему, линейные размеры которой весьма малы по сравнению с основными длинами излучаемых волн. Магнитные моменты токовых контуров совершают гармонические колебания. Подавляющая часть из них имеет частоты, мало отличающиеся от некоторой частоты  $\omega$ . Суммарный магнитный момент токовых контуров с частотами колебаний в интервале от  $\omega + \varepsilon$  до  $\omega + \varepsilon + d\varepsilon$  равен  $d\mu = \mu_0 f(\varepsilon) \cos(\omega + \varepsilon)t d\varepsilon$ , где  $\mu_0$  — постоянный вектор, а функция  $f(\varepsilon) = \frac{N\tau}{\pi(\varepsilon^2\tau^2 + 1)}$  описывает распределение токовых контуров по частотам гармонических колебаний при условии  $N \gg \omega\tau \gg 1$  и  $-\infty \leq \varepsilon \leq \infty$ . Определить интенсивность  $I$  излучения системы в среднем по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$ , а также полную энергию  $\mathcal{E}$  магнитно-дипольного излучения за бесконечное время  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

329. При каком условии интенсивность квадрупольного излучения не зависит от выбора начала координат?

330. Маленький шарик массы  $m$  прикреплен к нижнему концу невесомого стержня длины  $2l$ , который может свободно вращаться около своей средней неподвижной точки. Противоположные концы стержня несут точечные заряды величины  $e$ . В начальный момент времени стержень был отклонен от вертикального положения на малый угол  $\psi_0$  и покоился. В дальнейшем он совершает малые колебания под действием силы тяжести, приложенной к шарiku. Определить интенсивность  $I$  излучения системы в среднем по времени за период колебания.



331. Две частицы с одинаковым отношением заряда к массе  $e_1/m_1 = e_2/m_2 = e/m$  связаны между собой пружиной и совершают гармонические колебания в отсутствие поля тяжести. Длина ненагруженной пружины  $l$ , а ее коэффициент жесткости  $k$ . В начальный момент времени пружина была растянута до длины  $l_0$  и покоилась. Найти интенсивность  $I$  излучения в среднем по времени за период колебания пружины. Взаимодействием зарядов между собой пренебречь.

332. Определить полную энергию  $\mathcal{E}$  излучения, сопровождающего разлет осколков ядра в задаче 297, считая отношение заряда к массе у осколков одинаковым  $\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}$ .

333. Протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в произвольном направлении во внешнем однородном постоянном электрическом поле с напряженностью  $E$ . Представить интенсивность  $I$  квадрупольного излучения как функцию скорости  $v$  протона и напряженности внешнего электрического поля.

334. В магнитном поле две одинаковые частицы с массами  $m$  и зарядами  $e$  вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности, находясь на противоположных концах диаметра. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  кинетическая энергия обеих частиц равнялась  $\mathcal{E}_0$ . Определить обусловленный излучением закон убывания кинетической энергии  $\mathcal{E}$  частиц, предполагая, что взаимодействием зарядов между собой можно пренебречь. Скорость убывания кинетической энергии частиц очень мала  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \ll \omega \mathcal{E}$ .

335. Два одинаковых заряда величины  $e$  вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$ . Радиусы, проведенные в точки расположения зарядов, образуют между собой угол  $\psi$ . Определить величину угла  $\psi$ , при котором интенсивности дипольного  $I_d$  и квадрупольного  $I_D$  излучений данной системы двух зарядов одинаковы.

336. Точечный диполь с моментом  $\mathbf{d}$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$ . Вектор  $\mathbf{d}$  постоянен по модулю и в каждый момент времени направлен по радиусу окружности. Определить интенсивности дипольного  $I_d$ , магнитно-дипольного  $I_\mu$  и

квадрупольного  $I_D$  излучений в длинноволновом приближении  $R \ll \lambda = c/\omega$ .

337. Два одинаковых антипараллельных точечных диполя с моментами  $\mathbf{d}$  и  $-\mathbf{d}$  вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $R$ , находясь на противоположных концах диаметра. Моменты диполей постоянны по модулю и в каждый момент времени направлены по касательной к окружности. Определить интенсивность  $I$  излучения, считая  $R \ll \frac{c}{\omega}$ .

338. Антипараллельные точечные диполи с моментами  $\mathbf{d}$  и  $-\mathbf{d}$  расположены на расстоянии  $2a$  друг от друга и вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в плоскостях, перпендикулярных общей прямой, на которой они находятся. Определить интенсивность  $I$  излучения такой системы в длинноволновом приближении  $a \ll \frac{c}{\omega}$ .

339. Расстояние  $2a$  между двумя одинаковыми антипараллельными точечными диполями значительно меньше длины излучаемой волны  $a \ll \lambda = c/\omega$ . Дипольный момент одного из них  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ . Постоянный вектор  $\mathbf{d}_0$  перпендикулярен прямой, соединяющей диполи. Сравнить между собой интенсивности магнитно-дипольного  $I_\mu$  и квадрупольного  $I_D$  излучений в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

340. Дипольные моменты двух одинаковых маленьких диполей направлены вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны. Каждый диполь представляет собой систему двух частиц с массами  $m$  и зарядами  $e$  и  $-e$ , которые связаны между собой квазиупругой силой и колеблются с частотой  $\omega$ . Расстояние  $2a$  между диполями значительно меньше длины излучаемой волны. Определить усредненный по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$  закон убывания энергии  $\mathcal{E}$  диполей, если в начальный момент времени  $t_0 = 0$  они имели энергию  $\mathcal{E}_0$ .

341. Шар, заряженный по объему сферически-симметрично, пульсирует так, что его объемная плотность заряда меняется по времени по закону  $\rho = \rho(r, t)$ , где  $r$  — расстояние до центра шара. Будет ли иметь место излучение?

342. Заряд  $Q$  равномерно распределен внутри капли, поверхность которой совершает гармонические колебания вблизи равновесного положения по закону

$r = r_0(1 + \varepsilon \cos^2 \theta \cos \omega t)$ , где  $r$  — расстояние от центра капли до точки на ее поверхности,  $\theta$  — полярный угол сферической системы координат, а величины  $r_0$ ,  $\omega$  и  $\varepsilon$  постоянны ( $\varepsilon \ll 1$ ). Сохраняя члены с наименьшей степенью параметра  $\varepsilon$ , определить интенсивность  $I$  излучения.

343. Однородно заряженный тонкий диск радиуса  $R$  вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Полный заряд диска равен  $Q$ . Найти интенсивность  $I$  излучения.

344. Тонкое кольцо радиуса  $R$  равномерно заряжено с линейной плотностью  $q$ . Ось кольца прецессирует с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг другой оси, проходящей через центр кольца под углом  $\theta$  к его собственной оси (рис. 4). Найти интенсивность  $I$  излучения.

345. Заряд  $Q$  равномерно распределен по тонкому стержню длины  $2l$ , который вращается в плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей центральной точки. Найти интенсивность  $I$  излучения.

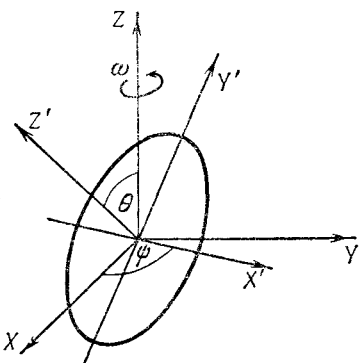


Рис. 4.

346. Однородно заряженный по объему эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$  покачивается в плоскости  $YZ$  около своего центра так, что угол между его осью симметрии и осью  $Z$  меняется по гармоническому закону  $\theta = \theta_0 \cos \omega t$ , где  $\theta_0 \ll 1$ . Полный заряд эллипсоида равен  $Q$ , а полуось  $b$  лежит на его оси симметрии. Оставляя члены, содержащие наименьшую степень угла  $\theta$ , найти интенсивности магнитно-дипольного  $I_\mu$  и квадрупольного  $I_D$  излучений.

347. Тонкий диск эллиптической формы с полуосями  $a$  и  $b$  равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Форма диска меняется со временем, оставаясь плоской и незначительно отклоняясь от круга радиуса  $R$ . Закон изменения параметра  $\frac{a-b}{a+b}$  деформации задан  $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$ , где  $\beta$  и  $\omega$  — постоянные ( $\beta \ll 1$ ). Площадь диска равна площади круга радиуса  $R$  и при де-

формации не меняется, если не учитывать слагаемые, квадратичные по малому параметру  $\beta$ . Оставляя члены с наименьшей степенью параметра  $\beta$ , определить интенсивность  $I$  квадрупольного излучения в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

**348.** Прямоугольный параллелепипед со сторонами  $a$ ,  $a$  и  $b$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . С течением времени параллелепипед деформируется так, что его поверхность испытывает малые гармонические колебания вблизи поверхности куба со стороной  $a_0$ . Параметр  $\frac{a-b}{a+b}$  деформации задан  $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$ , где  $\beta$  и  $\omega$  — постоянные ( $\beta \ll 1$ ). Объем параллелепипеда остается все время постоянным и равным объему куба со стороной  $a_0$ , если пренебречь слагаемыми, квадратичными по малому параметру  $\beta$ . Найти интенсивность  $I$  квадрупольного излучения в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

**349.** Заряды  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) движутся со скоростями  $\mathbf{v}_i$  в ограниченной области пространства. Опреде-

лить поправки порядка  $\frac{v_i^2}{c^2} \ll 1$  к векторному потенциалу и напряженности магнитного поля в волновой зоне. При помощи полученного результата найти поправки того же порядка к интенсивности дипольного излучения, представив формулу в следующем виде:

$$I = \frac{2\mathbf{d}^2}{3c^3} + \frac{2\mathbf{\mu}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \Delta I,$$

где  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{\mu}$  — дипольный и магнитный моменты,  $D_{\alpha\beta}$  — тензор квадрупольного момента движущихся зарядов, а величина  $\Delta I$  подлежит определению. Слагаемое  $\Delta I$  обычно опускается при написании интенсивности излучения системы, состоящей из медленно движущихся зарядов, хотя по порядку величины оно может совпадать с интенсивностями магнитно-дипольного и квадрупольного излучения.

**350.** Напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля между обкладками конденсатора однородна и постоянна. Внутри конденсатора параллельно полю  $\mathbf{E}$  движется с релятивистской скоростью  $\mathbf{v}$  частица, имеющая массу  $m$  и заряд  $e$ . Используя результат предыдущей задачи, определить интенсивность излучения с точностью до малых членов порядка  $v^2/c^2$ .

### § 3. Спектральное разложение излучения

351. До начального момента времени  $t_0 = 0$  электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  покоился. При  $t \geq 0$  он движется под действием электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ . Найти энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную электроном на частотах от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

352. На отрезке длины  $l$  течет линейный ток  $J = J_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ , где постоянные величины удовлетворяют неравенствам  $\alpha l \ll c$  и  $\omega_0 l \ll c$ . В моменты времени  $t \leq 0$  ток равнялся нулю. Найти энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную на частотах от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

353. Неподвижный шар равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$  положительным зарядом. Внутри шара на расстоянии  $a$  от его центра в моменты времени  $t \leq 0$  покоился электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . В последующее время  $t \geq 0$  электрон движется под действием электрического поля шара. Учитывая силу радиационного трения, определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$  дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

354. Осциллятор представляет собой частицу с массой  $m$  и зарядом  $e$ , которая совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0$  под действием внешней упругой силы. Начиная с момента времени  $t_0 = 0$ , покоившийся осциллятор подвергся действию внешнего электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ , которая описывается непрерывной функцией, обращающейся в нуль по истечении конечного промежутка времени. Принимая во внимание торможение излучением, найти энергию  $d\mathcal{E}_\omega$  дипольного излучения осциллятора, приходящуюся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

355. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  подвешена на невесомой жесткой нити и совершает малые колебания с частотой  $\omega_0$  в поле тяжести. Учитывая силу радиационного трения, определить ширину  $\Delta\omega$  спектральной линии излучения.

356. На большом расстоянии от излучателя в волновой зоне измерительный прибор в моменты времени  $0 \leq t$  зафиксировал электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ , где постоянные величины  $\alpha$  и  $\omega_0$  удовлетворяют неравенству  $\alpha \ll \omega_0$ . Определить ширину  $\Delta\omega$  спектральной линии излучения, прошедшего через измерительный прибор.

357. Совокупность возбужденных примесных атомов кристалла излучила электромагнитный импульс, распространяющийся в свободном пространстве в виде плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\tau} \left| t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right|} \cos \omega_0 \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right),$$

где векторы  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{n}$ , а также величины  $\omega_0$  и  $\tau$  постоянны. Несущая частота  $\omega_0$  импульса и время релаксации  $\tau$  кристалла связаны условием  $\omega_0 \tau \gg 1$ . Определить ширину  $\Delta\omega$  спектральной линии излучения.

358. Напряженность электрического поля когерентного спонтанного излучения атомов газа имеет вид плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{4T_0^2} \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right)^2} \cos \omega_0 \left( t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} \right),$$

где  $\omega_0$  — частота резонансного атомного перехода,  $T_0$  — время доплеровской релаксации ( $\omega_0 T_0 \gg 1$ ),  $\mathbf{n}$  — единичный вектор направления распространения волны, а  $\mathbf{E}_0$  — постоянный вектор. Определить ширину  $\Delta\omega$  спектральной линии излучения.

359. До начального момента времени частица с массой  $m$  и положительным зарядом  $e$  покоилась. В последующие моменты времени она движется под действием однородного постоянного электрического поля с напряженностью  $\mathbf{E}$ . Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , если частица пролетела расстояние  $l$  в области, где действует это поле.

360. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  влетает в полупространство, в котором напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля однородна и постоянна. Направление скорости  $\mathbf{v}_0$  электрона при влете образует с вектором  $\mathbf{E}$  острый угол  $\alpha$ . Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  за все время движения во внешнем поле.

361. Протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает с большим прицельным расстоянием  $l$  мимо неподвижного ядра, имеющего заряд  $Ze$ . Из-за большой величины  $l$  угол рассеяния протона мал. Скорость протона до взаимодействия с ядром по абсолютной величине равнялась  $v_0$ . Определить число  $dN_\omega$  мягких квантов, излученных

протоном с частотами в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , где  $\omega \ll \frac{v_0}{l}$ . Энергия кванта  $\hbar\omega$ .

362. Две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  и одноименными зарядами  $e_1$  и  $e_2$  двигаются по прямой из бесконечности навстречу друг другу. Когда взаимное расстояние становится равным  $l$ , частицы останавливаются, после чего совершают движение в противоположном направлении, разлетаясь на бесконечность. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$  дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Исследовать полученное выражение в области малых и больших частот.

363. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  и одноименными зарядами  $e_1$  и  $e_2$  покоились на расстоянии  $l$  друг от друга. В дальнейшем в результате кулоновского взаимодействия они разлетаются на бесконечно большое расстояние. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$  дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Исследовать полученное выражение в области малых и больших частот. Сравнить с аналогичными формулами предыдущей задачи.

364. Энергия взаимодействия двух заряженных частиц является функцией расстояния между ними и приводит к взаимному отталкиванию. Рассмотреть два случая движения: а) частицы налетают друг на друга по прямой линии и после остановки вновь разлетаются на бесконечно большое расстояние, совершая движение в противоположном направлении; б) частицы после остановки остаются в покое (или, наоборот, покоившиеся частицы с некоторого момента времени разлетаются на бесконечность). Доказать, что спектральные разложения дипольного излучения в этих двух случаях

$$d\mathcal{E}_\omega^a = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega)|^2 d\omega, \quad d\mathcal{E}_\omega^b = \frac{2}{3\pi c^3} |\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega)|^2 d\omega$$

выражаются через одну и ту же комплексную функцию  $f(\omega)$  при помощи соотношений

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = l \mathbf{2} \operatorname{Re} f(\omega), \quad \ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = l f(\omega),$$

где  $\mathbf{l}$  — постоянный единичный вектор, параллельный прямолинейной траектории. Причем функция  $f(\omega)$

удовлетворяет условию

$$2 \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2 d\omega = \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega,$$

а полные энергии дипольного излучения различаются между собой в два раза  $\mathcal{E}^a = 2\mathcal{E}^b$ .

**365.** Дипольный момент  $\mathbf{d}$  имеет постоянное направление, а по модулю меняется со временем по периодическому закону с периодом  $T = 2\pi/\omega_0$ . Представить среднюю по времени за период  $T$  интенсивность  $I$  излучения в виде суммы излучений на отдельных гармониках с частотами, являющимися целыми кратными основной частоты  $\omega_0$ .

**366.** Магнитный момент токов, текущих в весьма малой области пространства, меняется со временем по закону  $\mu = \mu_0 e^{-t^2/T^2}$ , где  $\mu_0$  — постоянный вектор, а  $T$  — постоянная. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  за бесконечное время от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ .

**367.** По неподвижной тонкой рамке в неограниченном промежутке времени  $-\infty \leq t \leq \infty$  течет линейный ток  $J = J_0 \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2}$ , где  $J_0$  и  $\tau$  — некоторые постоянные. Площадь рамки  $S$ , а ее линейные размеры малы по сравнению с величиной  $c\tau$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

**368.** Два одинаковых антипараллельных точечных диполя находятся на одной прямой на расстоянии  $2a$  друг от друга. Начиная с момента времени  $t_0 = 0$ , они совершают затухающие гармонические колебания. Момент одного из диполей  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t$ , где  $\gamma \ll \omega_0$ , а вектор  $\mathbf{d}_0$  лежит на прямой, соединяющей диполи. Расстояние между диполями мало по сравнению с основными длинами излучаемых волн. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

**369.** Решить предыдущую задачу в предположении, что вектор  $\mathbf{d}_0$  перпендикулярен прямой, соединяющей точечные диполи.

**370.** Два ядра с массовыми числами  $A_1$  и  $A_2$  и зарядами  $Z_1 e$  и  $Z_2 e$  движутся по одной и той же прямой из бесконечности навстречу друг другу. В системе центра



инерции суммарная кинетическая энергия обоих ядер до взаимодействия между собой равнялась  $\mathcal{E}_0$ . После останковки они вновь удаляются на бесконечность. Отношение заряда к массе у ядер одинаково  $\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}$ , где  $m$  — масса нуклона. Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Исследовать предельные случаи малых и больших частот.

371. Ядро расщепляется на два осколка с массовыми числами  $A_1$  и  $A_2$  и зарядами  $Z_1 e$  и  $Z_2 e$ , причем отношение заряда к массе у осколков одинаково  $\frac{Z_1 e}{A_1 m} = \frac{Z_2 e}{A_2 m} = \frac{Ze}{Am}$ , где  $m$  — масса нуклона. В момент расщепления скорости осколков равнялись нулю. В дальнейшем под влиянием кулоновского взаимодействия осколки разлетаются на бесконечно большое расстояние, имея суммарную энергию  $\mathcal{E}_0$ . Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Исследовать предельные случаи малых и больших частот. Сравнить полученные результаты с аналогичными формулами предыдущей задачи.

372. Считая отношение заряда к массе у частиц в задаче 364 одинаковым, доказать, что спектральные разложения квадрупольного излучения в указанных двух случаях

$$d\mathcal{E}_\omega^a = \frac{|\ddot{D}_{\alpha\beta}^a(\omega)|^2}{180\pi c^5} d\omega, \quad d\mathcal{E}_\omega^b = \frac{|\ddot{D}_{\alpha\beta}^b(\omega)|^2}{180\pi c^5} d\omega$$

выражаются через одну и ту же комплексную функцию  $f_{\alpha\beta}(\omega)$  при помощи соотношений

$$\ddot{D}_{\alpha\beta}^a(\omega) = 2i \operatorname{Im} f_{\alpha\beta}(\omega), \quad \ddot{D}_{\alpha\beta}^b(\omega) = f_{\alpha\beta}(\omega).$$

Функция  $f_{\alpha\beta}(\omega)$  удовлетворяет условию

$$2 \int_0^\infty (\operatorname{Im} f_{\alpha\beta}(\omega))^2 d\omega = \int_0^\infty |f_{\alpha\beta}(\omega)|^2 d\omega,$$

а полные энергии квадрупольного излучения различаются между собой в два раза  $\mathcal{E}^a = 2\mathcal{E}^b$ .

373. Частица с зарядом  $e$  налетает с прицельным расстоянием  $l$  на боковую поверхность абсолютно упругого конуса высоты  $h$  и радиуса основания  $R$  ( $R > l$ ). Начальная скорость  $v$  частицы параллельна оси косинуса.

Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$  дипольного излучения на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

374. Однородный поток частиц с зарядом  $e$  налетает со скоростью  $v$  на абсолютно упругий шар радиуса  $R$ . Найти эффективное излучение  $d\kappa_\omega$  в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Величина  $d\kappa_\omega$  определяется формулой

$$d\kappa_\omega = \int_0^\infty d\mathcal{E}_\omega \cdot 2\pi l \, dl,$$

где  $d\mathcal{E}_\omega$  — энергия дипольного излучения в интервале частот  $d\omega$  той частицы, которая пролетает с прицельным расстоянием  $l$ .

#### § 4. Угловое распределение излучения

375. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с напряженностью  $H_0$ . Скорость частицы по абсолютной величине равна  $v$ . Найти интенсивность  $dI$  дипольного излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период движения частицы.

376. Прямоугольная рамка с постоянным линейным током  $I$  вращается вокруг своей диагонали с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Площадь рамки равна  $S$ , а ее линейные размеры малы по сравнению с длиной излучаемой волны. Найти интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период вращения рамки.

377. Протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  покидает неподвижное ядро, радиус которого  $R$ , а остаточный заряд  $Ze$ . При вылете из ядра скорость протона равнялась нулю. Найти угловое распределение  $d\mathcal{E}_n$  полной энергии дипольного излучения, обусловленного кулоновским взаимодействием протона с ядром.

378. Заряд  $Q$  однородно заполняет объем цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $h$ . Поверхность цилиндра испытывает малые гармонические колебания вблизи равновесного положения, определяемого радиусом  $R_0$  и высотой  $h_0 = R_0$ . Изменение со временем параметра  $\frac{R-h}{R+h}$  деформации задано  $\frac{R-h}{R+h} = \varepsilon \cos \omega t$ , где  $\varepsilon$  и  $\omega$  — постоянные ( $\varepsilon \ll 1$ ). Объем цилиндра остается все время постоян-

ным и равным  $\pi R_0^3$ , если не учитывать члены, квадратичные по малому параметру  $\varepsilon$ . Найти интенсивность  $dI$  квадрупольного излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

379. Однородно заряженный цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $h$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около оси, проходящей через среднюю точку цилиндра перпендикулярно его оси симметрии. Полный заряд равен  $Q$ . Определить интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период вращения.

380. Квадруполь представляет собой систему четырех зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной  $l$ . Знак заряда  $e$  меняется на противоположный при переходе к соседней вершине. Предполагая, что квадруполь вращается в плоскости  $XU$  вокруг своего центра с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , определить угловое распределение интенсивности излучения  $dI$  в среднем по времени за период движения.

381. Двигаясь параллельно оси  $Z$ , заряженная частица налетает с прицельным расстоянием  $l$  на абсолютно упругий шар радиуса  $R$  ( $R > l$ ). Начало координат находится в центре шара, а траектория частицы с зарядом  $e$  лежит в плоскости  $XZ$ . Найти энергию  $d\mathcal{E}_{n\omega}$ , излученную в телесный угол  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

382. Квадрупольный момент  $D$  тела вращения меняется со временем по закону  $D = D_0 e^{-(t/T)^2}$ , где  $D_0$  и  $T$  — постоянные. Найти энергию  $d\mathcal{E}_{n\omega}$ , излученную в телесный угол  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  за бесконечное время от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ .

383. При распаде неподвижного ядра радиуса  $R$  образовалась  $\alpha$ -частица со скоростью, равной нулю. Заряд  $\alpha$ -частицы  $Q$ , а ее радиус пренебрежимо мал по сравнению с  $R$ . В результате кулоновского отталкивания  $\alpha$ -частица удалилась на бесконечность. Найти угловое распределение  $d\mathcal{E}_n$  полной энергии излучения с учетом малого слагаемого порядка  $\frac{v}{c} \ll 1$ , где  $v$  — скорость  $\alpha$ -частицы на бесконечности.

384. Частица с массой  $m$  и положительным зарядом  $e$  пролетает расстояние  $l$  в однородном постоянном электрическом поле с напряженностью  $E$ . Скорость  $v_0$  частицы при влете во внешнее поле была параллельна вектору  $E$ . Определить угловое распределение  $d\mathcal{E}_n$  полной

энергии излучения с учетом малого слагаемого порядка  $v/c$ , где  $v$  — скорость частицы при выходе из внешнего поля.

385. Первоначально покоившийся протон с массой  $m$  и зарядом  $e$  выталкивается из однородного постоянного электрического поля с напряженностью  $E$ , после того как пролетел в этом поле расстояние  $l$ . Скорость  $v$  протона при выходе из внешнего поля значительно меньше скорости света. Определить энергию  $d\mathcal{E}_{\text{пш}}$ , излученную протоном в телесный угол  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$  с учетом малого слагаемого порядка  $v/c$ .

386. Два одинаковых антипараллельных точечных диполя, расположенных на оси  $X$  на равном расстоянии  $a$  от начала координат, изменяются со временем по гармоническому закону. В точке с положительной координатой дипольный момент параллелен оси  $Y$  и равен  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ . Расстояние между диполями мало по сравнению с длиной излучаемой волны  $a \ll \lambda = c/\omega$ . Найти интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период колебания диполей.

387. Антипараллельные диполи с постоянными моментами  $\mathbf{d}$  и  $-\mathbf{d}$  находятся на противоположных концах диаметра и вращаются в плоскости  $XY$  по окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Начало координат расположено в центре окружности, а ось  $Z$  параллельна вектору  $\mathbf{d}$ . В длинноволновом приближении определить угловое распределение интенсивности излучения  $dI$  в среднем по времени за период движения.

388. На оси  $Z$  на одинаковом расстоянии  $a$  от начала координат расположены антипараллельные диполи с моментами  $\mathbf{d}$  и  $-\mathbf{d}$ , которые вращаются с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в плоскостях, перпендикулярных оси  $Z$ . В длинноволновом приближении определить угловое распределение интенсивности излучения  $dI$  в среднем по времени за период вращения.

389.  $N$  параллельных точечных диполей с моментами  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$  расположены на одной прямой на одинаковом расстоянии  $a$  друг от друга. Постоянный вектор  $\mathbf{d}_0$  направлен произвольно по отношению к вектору  $\mathbf{a}$ , соединяющему два соседних диполя. Расстояние между диполями сравнимо с длиной излучаемой волны  $a \sim \frac{c}{\omega}$ .

Рассматривая электромагнитное поле на больших рас-

стояниях от системы, определить интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ .

390. Пять одинаковых точечных диполей с моментами  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$  расположены, как указано на рис. 5 и 6.

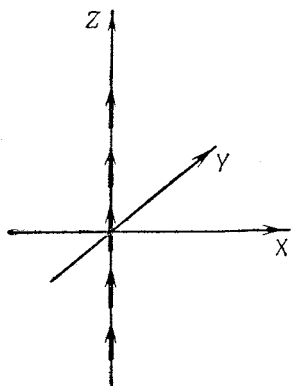


Рис. 5.

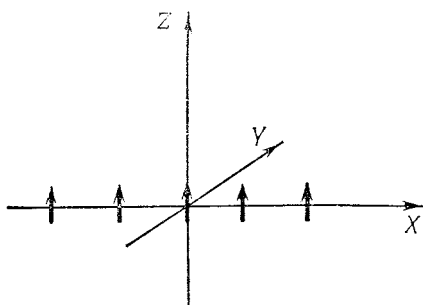


Рис. 6.

Вектор  $\mathbf{d}_0$  постоянен, а расстояние между диполями равно длине излучаемой волны  $c/\omega$ . В указанных двух случаях определить интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$ . Найти направления, для которых излучение максимально.

## § 5. Поляризация излучаемых волн

391. Положительный заряд  $e$  вращается по окружности радиуса  $R$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Определить поляризацию волн дипольного излучения.

392. Магнитный момент вращается в одной и той же плоскости с постоянной угловой скоростью. Определить поляризацию излучаемых волн.

393. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется перпендикулярно постоянному однородному магнитному полю с напряженностью  $\mathbf{H}_0$ . Скорость электрона по абсолютной величине равна  $v$ . Определить поляризацию волн квадрупольного излучения.

394. Электрон находится в электромагнитном поле линейно-поляризованной монохроматической волны.

Найти поляризацию волн когерентного дипольного излучения электрона.

395. Тонкая рамка с линейным током имеет форму окружности, плоскость которой сохраняет постоянное положение в пространстве, а радиус увеличивается со временем. Определить поляризацию излучаемых электромагнитных волн.

396. Две одинаковые заряженные частицы движутся в свободном пространстве по прямой, отталкиваясь друг от друга. Определить поляризацию излучаемых волн.

397. Поверхность однородно заряженного с объемной плотностью  $\rho$  эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$

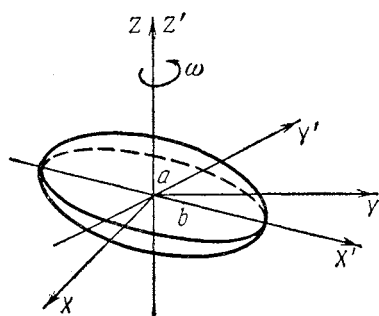


Рис. 7.

испытывает малые гармонические колебания вблизи поверхности шара радиуса  $R$ . Параметр  $\frac{a-b}{a+b}$  деформации меняется по закону  $\frac{a-b}{a+b} = \beta \cos \omega t$ , где  $\beta \ll 1$ , а полюсь  $b$  лежит на оси аксиальной симметрии эллипсоида. Объем эллипсоида все время остается постоянным и равным объему шара радиуса  $R$ , если от-

бросить слагаемые, квадратичные по малому параметру  $\beta$ . Найти угловое распределение интенсивности излучения  $dI$  и полную интенсивность  $I$  излучения по всем направлениям в среднем по времени за период колебания, а также определить поляризацию излучаемых волн. Эта задача описывает модель излучения при переходах между колебательными энергетическими уровнями ядра.

398. Однородно заряженный по объему эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей полуоси  $a$ , не являющейся осью аксиальной симметрии (рис. 7). Полный заряд эллипсоида равен  $Q$ . Найти угловое распределение интенсивности излучения  $dI$  и полную интенсивность  $I$  излучения по всем направлениям в среднем по времени

за период вращения, а также определить поляризацию излучаемых волн. Эта задача описывает модель излучения при переходах между вращательными энергетическими уровнями ядра.

## § 6. Рассеяние электромагнитных волн

399. Линейно-поляризованная плоская волна падает на свободный электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Представить эффективное сечение  $d\sigma$  рассеяния волны в телесный угол  $d\Omega$  как функцию углов рассеяния. Чему равно полное сечение  $\sigma$  рассеяния?

400. Решить предыдущую задачу, считая плоскую волну неполяризованной.

401. Циркулярная волна  $\mathbf{E} = E_0[\mathbf{i}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{i}_y \sin(\omega t - kz)]$  падает на свободный электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Найти интенсивность  $dI$  рассеянного излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем за период  $T = 2\pi/\omega$ . Чему равно полное сечение  $\sigma$  рассеяния волны?

402. В томсоновской модели атома водорода электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает колебательное движение внутри неподвижного шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного положительным зарядом. Вычислить дифференциальное  $d\sigma$  и полное  $\sigma$  сечение рассеяния циркулярно-поляризованной плоской волны на таком атоме. Частота  $\omega$  падающей волны не совпадает с атомной, а длина волны велика по сравнению с диаметром шара.

403. С учетом силы радиационного трения вычислить дифференциальное  $d\sigma$  и полное  $\sigma$  сечение рассеяния линейно-поляризованной плоской волны на атоме водорода, описываемом моделью Томсона (см. предыдущую задачу). Частота  $\omega$  падающей волны может совпадать с атомной, а длина волны велика по сравнению с диаметром атома.

404. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  совершает колебательное движение внутри цилиндра, равномерно заряженного с объемной плотностью  $\rho$ . Учитывая силу радиационного трения, определить дифференциальное  $d\sigma$  и полное  $\sigma$  сечение рассеяния линейно-поляризованной плоской волны на электроны. Длина падающей волны велика по сравнению с диаметром цилиндра, а вектор поляризации перпендикулярен его оси.

405. Определить дифференциальное  $d\sigma$  и полное  $\sigma$  сечение рассеяния эллиптически-поляризованной плоской волны

$$\mathbf{E} = I_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + I_y b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

на свободном электроны с массой  $m$  и зарядом  $e$ .

406. Определить полное сечение  $\sigma$  рассеяния линейно-поляризованной монохроматической плоской волны  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$  на свободном нейтроне, у которого магнитный  $\mu$  и механический  $\mathbf{M}$  моменты связаны соотношением  $\mu = -\beta \mathbf{M}$ . Частота  $\beta H_0$  прецессии магнитного момента мала по сравнению с частотой  $\omega$  падающей волны.

407. В электромагнитном поле эллиптически-поляризованной волны  $\mathbf{E} = I_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + I_y b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$  покоится атом, поляризуемость которого  $\beta$ . Длина волны велика по сравнению с линейным размером атома, поэтому у него во внешнем электрическом поле возникает дипольный момент  $\mathbf{d} = \beta \mathbf{E}$ . Определить дифференциальное  $d\sigma$  и полное  $\sigma$  сечения рассеяния электромагнитной волны на атоме.

408. Момент инерции атома относительно произвольной оси, проходящей через центр тяжести, равен  $J$ , а его электрический дипольный момент  $\mathbf{d}$  имеет равновероятную ориентацию в пространстве. Определить полное сечение рассеяния линейно-поляризованной плоской волны  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$  на электрическом диполе  $\mathbf{d}$ , усредненное по направлению вектора  $\mathbf{d}$ . Для упрощения формул предположить, что частота  $\Omega$  вращения вектора  $\mathbf{d}$  пренебрежимо мала по сравнению с характерной частотой  $\sqrt{dE_0/J}$ .

## § 7. Излучение протяженных источников

409. В конечном объеме, граничащем с вакуумом, течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . В промежутке времени от  $t_1$  до  $t_2$  объемная плотность заданного тока меняется со временем, а вне этого промежутка всюду равна нулю или постоянна. Моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  произвольны, в частности, возможно  $t_1 \rightarrow \infty$  и  $t_2 \rightarrow \infty$ . Доказать, что в волновой зоне, где напряженности электрического  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  полей по модулю убывают обратно пропорционально расстоянию от заданного тока,



выполняются равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = 0.$$

410. По отрезку  $[-l, l]$  оси  $Z$  течет линейный ток

$$J = J_0 \cos kz \sin \omega t,$$

где  $\omega = kc$ ,  $k = (2m + 1)\pi/2l$ ,  $m$  — целое положительное число, а  $c$  — скорость света в вакууме. Найти среднюю по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$ . Данная задача является примером излучения линейной антенны.

411. Сопротивлением излучения линейной антенны называется величина  $R = 2I/J_0^2$ , где  $I$  — средняя по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность излучения линейного тока  $J = J_0 \cos kz \sin \omega t$ , текущего по антенне. Используя результаты предыдущей задачи, представить сопротивление излучения антенны в виде

$$R = \frac{1}{c} \int_0^{(2m+1)2\pi} \frac{1 - \cos x}{x} dx.$$

412. Вдоль линейной антенны, лежащей на оси  $Z$ , бежит волна тока  $J = J(t - z/c)$ , где  $|z| \leq l$ ,  $c$  — скорость света в вакууме, а  $J(t - z/c)$  — дифференцируемая функция. Определить напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей излучения в точках плоскости  $XY$  на большом расстоянии от антенны в волновой зоне.

413. По отрезку  $[-l, l]$  оси  $Z$  в моменты времени  $t \geq 0$  течет линейный ток

$$J = J_0 \cos k_m z e^{-\gamma t} \sin \omega_m t,$$

где  $\omega_m = k_m c$ ,  $k_m = (2m + 1)\pi/2l$ ,  $m$  — целое положительное число, а  $c$  — скорость света в вакууме. Найти напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей в точках плоскости  $XY$ , лежащих на больших расстояниях  $r$  от тока ( $r \gg k_m l^2$ ). Представить найденное электромагнитное поле излучения в виде суперпозиции монохроматических волн с разными частотами, считая  $\gamma \ll \omega_m$ .

414. Вдоль линейной антенны длины  $2l$  бежит волна тока

$$J = J_0 \cos(\omega t - kz),$$

где  $\omega = kc$  и  $|z| \leq l$ , а  $c$  — скорость света в вакууме. Определить угловое распределение интенсивности излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока.

**415.**  $N$  параллельных линейных антенн длины  $2l$  расположены в плоскости  $XZ$  на одинаковом расстоянии друг от друга. Вектор  $\mathbf{a}$ , соединяющий две соседние антенны, параллелен оси  $X$ . Расстояние между антеннами сравнимо с длиной излучаемой волны  $a \sim c/\omega$ . Вдоль каждой антенны течет линейный ток

$$J = J_0 \sin kz \cos \omega t,$$

где  $|z| \leq l$ ,  $\omega = kc$ ,  $k = m\pi/l$ ,  $m$  — целое положительное число, а  $c$  — скорость света в вакууме. Определить напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля излучения на больших расстояниях  $r \gg l^2/a$  от антенн. Найти интенсивность излучения  $dI$  в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T = 4l/c$ .

**416.** По бесконечно тонкой пластине ( $-b \leq x \leq b$ ,  $-l \leq z \leq l$ ) параллельно оси  $Z$  течет ток с поверхностной плотностью  $i = i_0 \sin kz \cos \omega t$ , где  $\omega = kc$ ,  $k = m\pi/l$ ,  $m$  — целое положительное число, а  $c$  — скорость света в вакууме. Ширина и длина пластины сравнимы с длиной излучаемой волны. Определить интенсивность излучения  $dI$  в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T = 4l/c$ .

**417.** Параллельно оси цилиндрической поверхности радиуса  $R$  бежит волна тока с поверхностной плотностью  $i = i_0 \cos(\omega t - kz)$ , где  $|z| \leq l$ ,  $\omega = kc$ , а  $c$  — скорость света в вакууме. Длина волны  $c/\omega$  сравнима с радиусом  $R$ . Определить интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период колебания тока.

**418.** Ось  $Z$  служит общей осью двух одинаковых круглых конусов, которые расположены симметрично относительно плоскости  $XY$  и имеют общую вершину в начале декартовой системы координат. Образующая каждого конуса имеет длину  $b$  и составляет с его осью угол  $\theta_0$ . Полный ток, текущий по боковым поверхностям конусов, описывается функцией  $J = J(r, t)$ , где  $r$  — расстояние до их общей вершины. Определить интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$ . Исследовать предельные выражения полученной формулы в двух случаях  $\theta_0 \rightarrow 0$  и  $\theta_0 = \pi/2$ .

## § 8. Задачи, требующие вычисления на ЭВМ

419. Электрон с энергией  $\mathcal{E} = e^2/2a$  рассеивается на атоме водорода, электрическое поле которого определяется потенциалом  $\Phi(r) = e \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-2r/a}$ , где  $e$  — заряд протона,  $a = \frac{\hbar^2}{me^2}$  — боровский радиус,  $m$  — масса электрона и  $\hbar$  — постоянная Планка. Определить полную энергию  $\mathcal{E}_d$  дипольного излучения в процессе рассеяния. При помощи вычисления на ЭВМ построить кривую зависимости излученной энергии  $\mathcal{E}_d$  от прицельного расстояния  $l$  пролетающего электрона.

420. Поток частиц с массой  $m$ , зарядом  $e$  и энергией  $\mathcal{E}_0$  движется в сферически-симметричном потенциальном поле  $U(r) = U_0 e^{-r/a}$ , где  $a$  и  $U_0$  — положительные постоянные. Найти эффективное излучение

$$\kappa = \int_0^\infty \Delta \mathcal{E} \cdot 2\pi l \, dl. \text{ Здесь } \Delta \mathcal{E} \text{ — полная энергия дипольного излучения частицы, пролетающей с прицельным расстоянием } l.$$

Пользуясь вычислением на ЭВМ, построить кривую зависимости эффективного излучения  $\kappa$  от энергии  $\mathcal{E}_0$  в области  $0,1 U_0 \leq \mathcal{E}_0 \leq 10 U_0$ .

421. Частица с зарядом  $Q$  движется со скоростью  $v$  по прямой мимо первоначально покоившегося заряженного осциллятора, собственная частота которого  $\omega_0$ , а заряд и масса равны соответственно  $e$  и  $m$ . Расстояние  $l$  от центра осциллятора до прямолинейной траектории движения частицы настолько велико, что изменением скорости  $v$  можно пренебречь. Пренебрегая также силой радиационного трения, построить кривую интенсивности  $I$  излучения осциллятора под действием пролетающей заряженной частицы. Для вычисления на ЭВМ положить  $v = \omega_0 l$  и считать амплитуду колебаний осциллятора малой по сравнению с  $l$ .

422. Покоившийся заряженный осциллятор с трением с момента времени  $t = t_0$  подвергся действию внешней силы  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{-t^2/\tau^2}$ , так что его уравнение движения приняло вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{\mathbf{F}_0}{m} e^{-t^2/\tau^2},$$

где  $\omega_0$  и  $m$  — собственная частота и масса осциллятора, а коэффициент  $\gamma$  характеризует энергетические потери,

обусловленные трением. Заряд колеблющейся частицы  $e$ . Полагая  $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$  и используя численные методы, построить и сравнить между собой кривые интенсивности  $I$  излучения осциллятора под действием внешней силы  $F$  в двух случаях:  $t_0 = 0$  и  $t_0 = -\infty$ .

423. Тяжелое ядро с зарядом  $Q$  движется со скоростью  $v$  по прямолинейной траектории на большом расстоянии  $l$  от покоящегося электронейтрального атома, поляризуемость которого  $\beta$ . Последнее означает, что во внешнем электрическом поле с напряженностью  $E$  у атома появляется электрический дипольный момент  $\mathbf{d} = \beta E$ . Пренебрегая изменением скорости  $v$  движущегося ядра, найти энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную поляризованным атомом на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . При помощи численных методов построить кривую  $d\mathcal{E}_\omega/d\omega$  спектрального разложения излучения.

424. Два ядра имеют массовые числа  $A_1$  и  $A_2$  и заряды  $Z_1e$  и  $Z_2e$ . В системе центра инерции их суммарная энергия  $\mathcal{E}_0$ . Масса нуклона  $m$ . Рассмотреть два случая движения: а) ядра налетают друг на друга по прямой линии и после остановки вновь разлетаются на бесконечность; б) ядра с некоторого момента времени  $t = 0$  разлетаются на бесконечность, являясь осколками большего ядра (в начальный момент времени  $t = 0$  их скорости равнялись нулю). Определить спектральные плотности излучения  $d\mathcal{E}_\omega^a/d\omega$  и  $d\mathcal{E}_\omega^b/d\omega$  в случаях а и б. При помощи численных методов построить и сравнить между собой кривые спектрального разложения излучения в обоих указанных случаях.

425. Решить предыдущую задачу, считая отношение заряда к массе у обоих ядер одинаковым

$$\frac{Z_1e}{A_1m} = \frac{Z_2e}{A_2m} = \frac{Ze}{Am}.$$

426. В пространстве в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}$  распространяется электромагнитная волна, напряженность электрического поля которой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-(t'/\tau)^4} \cos \omega_0 t',$$

где  $t' = t - \frac{nr}{c}$ ,  $\mathbf{E}_0$  — постоянный вектор, а параметры  $\tau$  и  $\omega_0$  удовлетворяют неравенству  $\omega_0 \tau \gg 1$ . Используя численные методы, начертить спектральную линию  $\mathcal{E}(\omega)$  излучения, распространяющегося в виде данного

электромагнитного импульса. Определить ширину  $\Delta\omega$  спектральной линии.

427. По бесконечно тонкой пластине ( $-b \leq x \leq b$ ,  $-l \leq z \leq l$ ) параллельно оси  $Z$  бежит волна тока с поверхностной плотностью  $\mathbf{i} = i_z i_0 \exp\left[-\frac{1}{\tau^6} \left(t - \frac{z}{c}\right)^6\right]$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, а  $i_0$  и  $\tau$  — постоянные. Определить напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей излучения в точках оси  $X$  на большом расстоянии  $r$  от пластины. Полагая  $b = l = c\tau$ , построить кривую зависимости напряженности электрического поля от времени для некоторой фиксированной точки наблюдения волновой зоны. Начертить спектральную линию  $\mathcal{E}(\omega)$  излучения, прошедшего через эту точку наблюдения.

428. В направлении оси цилиндра высоты  $2h$  и радиуса  $R$  бежит волна тока с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 e^{-(r/R)^3} \cos(kz - \omega t)$ , где  $\omega = kc$ , а  $r$  и  $z$  — цилиндрические координаты. Постоянный вектор  $\mathbf{j}_0$  параллелен оси  $Z$ . Начало координат выбрано в центральной точке цилиндра. Определить среднюю за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность излучения в единицу телесного угла  $dI/d\Omega$  как функцию полярного угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси цилиндра. Построить диаграмму направленности излучения, откладывая численное значение величины  $dI/d\Omega$  для каждого угла  $\theta$  в виде отрезка на луче, составляющем тот же угол с полярной осью, которая совпадает с осью цилиндра. Для вычисления на ЭВМ положить  $h = R = 1/k$ .

429. Биконический вибратор состоит из поверхностей двух одинаковых круговых конусов, касающихся вершинами и имеющих общую ось. Образующая каждого конуса имеет длину  $l$  и составляет угол  $\pi/4$  с его осью. По биконической поверхности в направлении образующей течет полный ток  $I = I_0 \cos kr \sin \omega t$ , где  $k = \omega/c = \pi/2l$ , а  $r$  — расстояние до общей вершины. Определить среднюю за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность излучения в единицу телесного угла  $dI/d\Omega$  как функцию полярного угла  $\theta$ , отсчитываемого от оси вибратора. При помощи численных методов построить кривую зависимости величины  $dI/d\Omega$  от угла  $\theta$ .

430. С момента времени  $t = 0$  из точки пространства с радиус-вектором  $\mathbf{r} = 0$  был испущен импульс тока, который начал растекаться во все стороны с объемной

плотностью  $\mathbf{j} = \frac{(\mathbf{l}r)}{r^2} F(r, t)$ . Здесь  $\mathbf{l}$  — постоянный единичный вектор, а  $F(r, t)$  — произвольная функция модуля  $r$  радиус-вектора и времени  $t$ . Определить напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей в волновой зоне, где эти величины убывают обратно пропорционально расстоянию от тока. Полагая

$$F(r, t) = j_0 \frac{\lambda^2 e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r^2} \cdot \frac{t - \frac{r}{c}}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{c} \right)},$$

где  $t \geq \frac{r}{c}$ ,  $c$  — скорость света в вакууме, а постоянные  $\lambda$  и  $\tau$  связаны условием  $c\tau = 10\lambda$ , построить кривую зависимости напряженности электрического поля излучения от времени для некоторой фиксированной точки наблюдения волновой зоны.

## Г л а в а V

### ПОЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Инерциальная система координат вместе с прикрепленными к ней часами называется инерциальной системой отсчета. Происшедшее событие будем отмечать координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  места, где оно произошло, и временем  $t$ , когда оно произошло в определенной инерциальной системе отсчета.

Каждому событию можно сопоставить точку в четырехмерном пространстве, которая характеризуется 4-радиус-вектором  $x_i$  с компонентами

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, \\ x_3 &= z, & x_4 &= ict. \end{aligned} \quad (\text{V. 1})$$

Сумма квадратов компонент 4-радиус-вектора

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (\text{V. 2})$$

представляет собой квадрат расстояния точки (V. 1) до начала координат и определяет метрику данного четырехмерного пространства.

Пусть штрихованная инерциальная система координат  $X'Y'Z'$  движется вдоль оси  $X$  со скоростью  $V$  относительно покоящейся координатной системы  $XYZ$ . Одноименные декартовы оси параллельны, а в момент времени  $t=0$  начала этих двух координатных систем совпадали (рис. 8). Тогда координаты и время одного и того же события, зарегистрированные в указанных

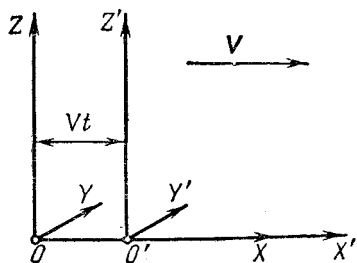


Рис. 8.

инерциальных системах отсчета, связаны между собой преобразованием Лоренца

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{V.3})$$

или в четырехмерном обозначении

$$x_1 = \frac{x'_1 - i \frac{V}{c} x'_4}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i \frac{V}{c} x'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Последнее преобразование удобно записать в матричном виде \*)

$$x_i = a_{ik} x'_k, \quad (\text{V.4})$$

$$a_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.5})$$

Формулы обратного преобразования получаются путем изменения знака у скорости  $V$  на противоположный

$$x'_i = a_{ik}^{-1} x_k = a_{ik}^T x_k. \quad (\text{V.6})$$

Поскольку матрица (V.5) удовлетворяет условию  $a_{ik}^{-1} = a_{ki}$ , преобразование Лоренца (V.4) является линейным ортогональным преобразованием координат в четырехмерном пространстве. Оно описывает переход от одной координатной системы  $(X_1 X_2 X_3 X_4)$  к другой  $(X'_1 X'_2 X'_3 X'_4)$ , повернутой в плоскости  $X_1 X_4$  на некоторый

---

\*) В данной главе по дважды повторяющимся матричным и тензорным индексам, обозначенным латинскими буквами ( $i, k, l, \dots$ ), предполагается суммирование от 1 до 4, а знак суммы опускается. Между тем греческие индексы ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ), как и прежде, пробегают значения от 1 до 3.



угол. Величина (V.5) представляет собой матрицу этого линейного ортогонального преобразования.

Вектором  $A_i$  в четырехмерном пространстве (4-вектором) называется совокупность четырех величин  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ , которые при ортогональном преобразовании координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора

$$A_i = a_{ik} A'_k, \quad A'_i = a_{ik}^{-1} A_k, \quad (\text{V. 7})$$

где  $a_{ik}$  — матрица произвольного линейного ортогонального преобразования координат в четырехмерном пространстве. В частности, она может иметь вид (V.5).

Для 4-вектора принято обозначение

$$A_i = (\mathbf{A}, A_4), \quad (\text{V. 8})$$

где  $\mathbf{A} = 1_x A_1 + 1_y A_2 + 1_z A_3$ . Первые три компоненты  $A_1, A_2$  и  $A_3$  4-вектора называют пространственными, а четвертую  $A_4$  — временной.

Аналогично четырехмерным тензором второго ранга называется совокупность шестнадцати величин  $T_{ik}$ , которые при ортогональном преобразовании координат преобразуются как произведение компонент 4-радиус-вектора

$$T_{ik} = a_{il} a_{km} T'_{lm}, \quad T'_{ik} = a_{il}^{-1} a_{km}^{-1} T_{lm}. \quad (\text{V. 9})$$

Если некоторая величина не меняет своего численного значения при переходе в любую повернутую четырехмерную систему координат, то она называется скаляром. Этому свойству удовлетворяет, например, скалярное произведение  $A_i B_i = \mathbf{A} \mathbf{B} + A_4 B_4$  4-векторов  $A_i$  и  $B_i$ , которое инвариантно по отношению к поворотам четырехмерной системы координат

$$A_i B_i = A'_i B'_i = \text{inv.} \quad (\text{V. 10})$$

Импульс  $\mathbf{p}$  и энергия  $\mathcal{E}$  частицы с массой  $m$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (\text{V. 11})$$

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{V. 12})$$

образуют 4-вектор  $p_i$  энергии-импульса (или просто 4-импульс)

$$p_i = \left( \mathbf{p}, i \frac{\mathcal{E}}{c} \right). \quad (\text{V. 13})$$

Эту величину часто представляют в следующем виде  $p_i = m c u_i$ , вводя понятие 4-скорости:

$$u_i = \left( \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (\text{V. 14})$$

Компоненты четырехмерной скорости удовлетворяют условию  $u_i^2 = -1$ , так что можно записать

$$\mathbf{p}^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m^2 c^2. \quad (\text{V. 15})$$

Из формул (V. 11) и (V. 12) вытекают полезные соотношения

$$\mathbf{p} = \mathcal{E} \frac{\mathbf{v}}{c^2}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}, \quad T = \mathcal{E} - m c^2, \quad (\text{V. 16})$$

где величина  $T$  называется кинетической энергией релятивистской частицы, а значение  $m c^2$  — энергией покоя.

Дифференцируя по времени обе части равенства (V. 15) и используя уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}, \quad (\text{V. 17})$$

легко определить скорость изменения кинетической энергии частицы во внешнем силовом поле  $\mathbf{F}$ :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{v} \mathbf{F}. \quad (\text{V. 18})$$

Наравне с трехмерной силой  $\mathbf{F}$ , действующей на частицу, вводят понятие 4-вектора силы  $\hat{f}_i$  с компонентами

$$\hat{f}_i = \left( \frac{\mathbf{F}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}, i \frac{\mathbf{v} \mathbf{F}}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (\text{V. 19})$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. Четырехмерная сила входит в правую часть ковариантного уравнения движения

$$m c \frac{du_i}{ds} = \hat{f}_i. \quad (\text{V. 20})$$

Здесь  $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , а  $du_i/ds = w_i$  — четырехмерное ускорение, которое ортогонально к 4-вектору скорости  $w_i u_i = 0$  и имеет следующие компоненты:

$$w_i = \left( \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{i}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Объемные плотности тока  $\mathbf{j}$  и заряда  $\rho$  образуют 4-вектор плотности тока

$$j_i = (\mathbf{j}, ic\rho), \quad (\text{V. 22})$$

а векторный  $\mathbf{A}$  и скалярный  $\phi$  потенциалы составляют 4-вектор

$$A_i = (\mathbf{A}, i\phi), \quad (\text{V. 23})$$

который называется 4-потенциалом.

Соотношения (IV.1) и (IV.2), определяющие векторный и скалярный потенциалы, в четырехмерном обозначении записываются единым образом:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \quad (\text{V. 24})$$

где величина  $F_{ik}$  называется тензором электромагнитного поля. Напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей являются компонентами этого антисимметричного тензора

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{V. 25})$$

При помощи тензора электромагнитного поля уравнения Максвелла (III.1)—(III.4) можно представить в ковариантной форме

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j_k, \quad (\text{V. 26})$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad (\text{V. 27})$$

Формулы (V.9) и (V.25) позволяют получить закон преобразования электрического и магнитного полей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую (см. рис. 8)

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (\text{V. 28})$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (\text{V. 29})$$

или в векторной форме

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (\text{V. 30})$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}, \quad \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H}'_{\perp} + \frac{1}{c}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (\text{V. 31})$$

где знаки  $\parallel$  и  $\perp$  отмечают компоненту вектора, соответственно параллельную и перпендикулярную скорости  $\mathbf{V}$ .

Из векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  нетрудно образовать величины, инвариантные по отношению к преобразованию Лоренца:

$$E^2 - H^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E}\mathbf{H} = \text{inv}. \quad (\text{V. 32})$$

Применяя инварианты (V.10) и (V.32) к монохроматической плоской электромагнитной волне

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{H} = (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \frac{c}{\omega}, \quad (\text{V. 33})$$

приходят к выводу, что векторы напряженности электрического и магнитного полей этой волны равны по модулю и ортогональны во всех инерциальных системах отсчета, а фаза волны является инвариантом

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = -k_i x_i = \text{inv}, \quad (\text{V. 34})$$

где  $k_i = (\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c})$  — волновой 4-вектор.

Тензор энергии — импульса электромагнитного поля

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( F_{il} F_{lk} + \frac{1}{4} F_{lm}^2 \delta_{ik} \right) \quad (\text{V. 35})$$

обладает свойствами  $T_{ik} = T_{ki}$  и  $T_{ii} = 0$ . Его временная  $T_{44}$  и пространственно-временные  $T_{\alpha 4}$  компоненты связаны с плотностью энергии  $w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$  и плотностью импульса  $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  электромагнитного поля следующим образом:

$$T_{44} = w, \quad T_{\alpha 4} = -ic g_{\alpha}. \quad (\text{V. 36})$$

Плотность импульса  $\mathbf{g}$  электромагнитного поля пропорциональна плотности потока электромагнитной энергии (вектору Пойнтинга  $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ )

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{s}. \quad (\text{V. 37})$$

Девять пространственных компонент 4-тензора (V. 35) составляют трехмерный максвелловский тензор натяжений

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} (E^2 + H^2) \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (\text{V. 38})$$

Сила, приложенная к поверхности  $S$  в электромагнитном поле, выражается через максвелловский тензор натяжений (V. 38)

$$F_\alpha = \int_S T_{\alpha\beta} n_\beta dS, \quad (\text{V. 39})$$

где  $F_\alpha$  — компонента силы, а  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ .

В четырехмерной записи уравнение движения (V. 20) отдельной частицы с массой  $m$  и зарядом  $e$  во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \quad (\text{V. 40})$$

Пространственная часть этого четырехмерного векторного равенства после сокращения на общий множитель совпадает с уравнением Ньютона (V. 17), в правой части которого стоит сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right]. \quad (\text{V. 41})$$

Электромагнитное поле заряда  $e$ , движущегося с произвольной скоростью  $\mathbf{v}$ , определяется потенциалами Лиенара — Вихерта

$$\varphi = \frac{e}{R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c \left( R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right)}, \quad (\text{V. 42})$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')$ , а  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_e(t')$  — радиус-векторы точек наблюдения и расположения заряда. Запоздывающий

момент времени  $t'$  связан с временем наблюдения  $t$  условием

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|. \quad (\text{V. 43})$$

Путем дифференцирования потенциалов Лиенара — Вихерта находят напряженности электрического и магнитного полей движущегося заряда

$$\mathbf{E} = \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right)}{\left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)^3} + \frac{e \left(\mathbf{R} \times \left(\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right)\right)}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c}\right)^3}, \quad (\text{V. 44})$$

$$\mathbf{H} = \frac{(\mathbf{R} \times \mathbf{E})}{R}. \quad (\text{V. 45})$$

Электрическое (V.44) и магнитное (V.45) поля состоят из двух характерных частей. Первая часть зависит от скорости точечного заряда и убывает с расстоянием, как  $1/R^2$ . Она перемещается вместе с зарядом и не отрывается от него, так как поток энергии этого поля через сферу радиуса  $R$  стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Вторая часть зависит не только от скорости, но и ускорения и спадает по закону  $1/R$ . Это приводит к отличному от нуля потоку вектора Пойнтинга сквозь сферу бесконечно большого радиуса. Следовательно, вторая часть полей (V.44) и (V.45) описывает излучение электромагнитных волн ускоренно движущимся зарядом.

Интенсивность излучения заряда  $e$  в телесный угол  $d\Omega$

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2(t) R^2 d\Omega \quad (\text{V. 46})$$

содержит лишь второе слагаемое выражения (V.44) и после простого преобразования принимает вид

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2 (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) (\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}})}{c \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^6} \right\} d\Omega, \quad (\text{V. 47})$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$  — единичный вектор в направлении излучения, а все величины в правой части равенства (V.47) берутся в запаздывающий момент времени (V.43).

В силу своего определения интенсивности излучения (V.46) и (IV.22) численно отличаются друг от друга, если учитывать запаздывание излученного электромагнитного сигнала в пределах эффективной области движения заряда. Это связано с тем, что потоки вектора Пойнтинга через сферические поверхности весьма больших радиусов  $r$  и  $R$  в один и тот же момент времени  $t$  различны, так как центры указанных сфер не совпадают.

Если скорость и ускорение заряда параллельны, то формула (V.47) упрощается

$$dI = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} d\Omega, \quad (\text{V.48})$$

где  $\theta$  — угол между скоростью и направлением излучения. Для взаимно перпендикулярных векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}$  имеем

$$dI = \frac{e^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \left[ \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \psi}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} \right] d\Omega. \quad (\text{V.49})$$

В этой формуле  $\theta$  — угол между скоростью  $\mathbf{v}$  и единичным вектором  $\mathbf{n}$  направления излучения, а  $\psi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{n}$  с плоскостью, проходящей через скорость  $\mathbf{v}$  и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$  заряда.

Излучение в элемент телесного угла  $d\Omega$  за все время движения заряда  $e$  дается формулой

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_n = \\ = \frac{e^2}{4\pi c^3} d\Omega \int \left\{ \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})(\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^4} + \frac{\dot{v}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^5} \right\} dt', \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

в которой использовано соотношение

$$dt = \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) dt'. \quad (\text{V.51})$$

Каждый заряд, движущийся с ускорением, излучает электромагнитные волны, которые уносят энергию и

импульс. Излученные за время  $dt$  энергия  $d\mathcal{E}_{\text{изл}}$  и импульс  $d\mathbf{P}_{\text{изл}}$  определяются формулами

$$d\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{F})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (\text{V. 52})$$

$$d\mathbf{P}_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3m^2c^5} \frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{F})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v} dt, \quad (\text{V. 53})$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса частицы, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$  в силовом поле  $\mathbf{F}$  согласно уравнению Ньютона (V.17).

Иногда правые части равенств (V.52) и (V.53) записывают иначе:

$$d\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt, \quad (\text{V. 54})$$

$$d\mathbf{P}_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3c^5} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \mathbf{v} dt, \quad (\text{V. 55})$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$  — скорость и ускорение заряда  $e$ .

Во внешнем электромагнитном поле с напряженностями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  величина  $\mathbf{F}$  без учета обратного действия излучения на заряженную частицу совпадает с силой Лоренца (V.41), а формулы (V.52) и (V.53) приводятся к следующему виду:

$$d\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (\text{V. 56})$$

$$d\mathbf{P}_{\text{изл}} = \frac{2e^4}{3m^2c^5} \frac{\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathbf{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathbf{v} dt. \quad (\text{V. 57})$$

При движении в силовом поле  $\mathbf{F}$  скорость потери энергии заряженной частицей на излучении электро-



магнитных волн описывается выражением

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}_\pi}{dt}\right)_{\text{изл}} = \frac{2e^2}{3m^2c^3} \frac{F^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vF})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (\text{V. 58})$$

где  $\mathcal{E}_\pi$  — энергия частицы в этом силовом поле.

Учет силы радиационного трения в уравнении движения (V. 17) может существенно повлиять на радиус-вектор  $\mathbf{r}_e(t)$ , скорость  $\mathbf{v}(t)$  и ускорение  $\dot{\mathbf{v}}(t)$  заряженной частицы, что отразится на правых частях соотношений (V. 47) — (V. 58).

Полная интенсивность излучения по всем направлениям

$$I = \frac{c}{4\pi} \int E^2(t) R^2 d\Omega \quad (\text{V. 59})$$

по физическому смыслу и численному значению отличается от скорости потери энергии заряженной частицей на излучение (V. 58), хотя обе эти величины имеют одинаковую размерность. Указанные величины совпадают только в предельном случае медленного движения заряженной частицы со скоростью  $v \ll c$ , когда запаздыванием излученного электромагнитного сигнала внутри эффективной области движения можно пренебречь. В этом предельном случае формулы (V. 59) и (V. 58) совпадают с аналогичными выражениями (IV. 16) и (IV. 31), если последние применять к излучению отдельного заряда.

Если радиус-вектор  $\mathbf{r}_e(t)$  заряда  $e$  меняется со временем заданным образом, то энергия  $d\mathcal{E}_{\text{пв}}$ , излученная в элемент телесного угла  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , имеет вид

$$d\mathcal{E}_{\text{пв}} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_e(t)) e^{i\omega\left(t - \frac{n\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega d\omega. \quad (\text{V. 60})$$

В частности, при внезапном изменении скорости заряженной частицы в результате столкновения соотношение (V. 60) запишется как

$$d\mathcal{E}_{\text{пв}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left( \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_1}{1 - \frac{n\mathbf{v}_1}{c}} - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_2}{1 - \frac{n\mathbf{v}_2}{c}} \right)^2 d\Omega d\omega, \quad (\text{V. 61})$$

где  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  — скорости частицы до и после столкновения. Формула (V.61) справедлива для частот  $\omega\tau \ll 1$ , где  $\tau$  — порядок величины времени взаимодействия, в результате которого произошло резкое изменение скорости частицы. При мгновенном изменении скорости область применимости формулы (V.61) ограничена условием малости величины  $\hbar\omega$  по сравнению с кинетической энергией частицы, чтобы исключить квантовые эффекты в излучении.

Формулы (V.60) и (V.61) допускают обобщение на случай системы зарядов  $e_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ), движущихся по заданным траекториям

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \sum_{m=1}^N e_m \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_m(t)) e^{i\omega \left(t - \frac{n\mathbf{r}_m(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega d\omega, \quad (\text{V. 62})$$

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left[ \sum_{m=1}^N e_m \left( \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{1m}}{1 - \frac{n\mathbf{v}_{1m}}{c}} - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{2m}}{1 - \frac{n\mathbf{v}_{2m}}{c}} \right) \right]^2 d\Omega d\omega, \quad (\text{V. 63})$$

где  $\mathbf{r}_m(t)$  — радиус-вектор заряда  $e_m$ , а  $\mathbf{v}_{1m}$  и  $\mathbf{v}_{2m}$  — его скорости до и после столкновения. Правые части равенств (V.62) и (V.63) учитывают интерференцию электромагнитных волн, излученных отдельными зарядами.

В случае периодического движения заряда  $e$  средняя по времени за период  $T = 2\pi/\omega_0$  интенсивность  $dI_n$  излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  на  $n$ -й гармонике с частотой  $\omega_n = n\omega_0$  равна

$$dI_n = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2\pi c^3} \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}_e(t)) e^{in\omega_0 \left(t - \frac{n\mathbf{r}_e(t)}{c}\right)} dt \right|^2 d\Omega. \quad (\text{V. 64})$$

Полная мощность излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  в среднем по времени представляет собой бесконечную сумму интенсивностей излучения (V.64) на отдельных гармониках с индексами  $n = 1, 2, \dots$

Для системы зарядов, движущихся с одним и тем же периодом, обобщение формулы (V.64) проводится по

аналогии с соотношениями (V.60)—(V.63). Если периоды движения отдельных зарядов различны, то средняя по времени интенсивность излучения выглядит более сложной.

Обратное действие излучения на заряженную частицу, движущуюся со скоростью  $v$  во внешнем электромагнитном поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , учитывается в уравнении движения путем прибавления к силе Лоренца специфической силы  $\mathbf{f}$  радиационного трения, которая направлена против скорости  $\mathbf{v}$ . Выбирая последнюю в качестве оси  $X$ , получаем в ультрарелятивистском случае

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4} \frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{V. 65})$$

При скоростях частицы, близких к скорости света, могут реализоваться условия, когда сила радиационного трения (V.65) является основной действующей силой. Тогда после пролетания через внешнее электромагнитное поле энергия заряженной частицы не может превышать критического значения  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ , даваемого равенством

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{кр}}} = \frac{2e^4}{3m^4c^8} \int_{-\infty}^{\infty} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2] dx. \quad (\text{V. 66})$$

## § 1. Преобразование электромагнитного поля

431. В покоящейся системе отсчета напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  однородного электромагнитного поля заданы, причем  $\mathbf{E}\mathbf{H} > 0$ . Определить скорости  $\mathbf{V}$  тех инерциальных систем координат, в которых векторы электрического и магнитного полей параллельны.

432. В покоящейся системе отсчета напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей взаимно ортогональны и не равны по модулю. Найти скорости  $\mathbf{V}$  тех инерциальных систем координат, в которых имеются: а) только электрическое поле; б) только магнитное поле. Определить напряженность указанных полей.

433. Напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  однородного электромагнитного поля в некоторой инерциальной системе координат заданы, причем  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} \neq 0$ . Найти скорости  $\mathbf{V}$  всех инерциальных систем координат, в которых модуль

напряженности электрического (или магнитного) поля имеет то же численное значение, что и в исходной системе отсчета. Результат представить в векторной форме.

434. Вдоль бесконечного однородного цилиндра произвольного радиуса течет постоянный ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}$ . Объемная и поверхностная плотности заряда цилиндра равны нулю. Найти скорости  $\mathbf{V}$  инерциальных систем координат, где в каждой точке пространства напряженность электрического поля по модулю в  $N$  раз меньше напряженности магнитного.

435. При помощи формул преобразования напряженностей электрического и магнитного полей (V.28) и (V.29) доказать, что величины  $E^2 - H^2$  и  $\mathbf{E}\mathbf{H}$  не меняют своего вида и численного значения при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

436. Напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электрического и магнитного полей в исходной системе координат образуют острый угол. Определить модули  $E'$  и  $H'$  напряженностей электрического и магнитного полей в той инерциальной системе отсчета, в которой угол между векторами  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  равен  $\pi/4$ .

437. Нейтрон с магнитным моментом  $\mu$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в кулоновском поле покоящегося ядра с зарядом  $Q$ . Считая скорость нейтрона малой по сравнению со скоростью света и пренебрегая членами порядка  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ , найти силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к нейтрону в каждой точке траектории.

438. Электронейтральная частица с внутренним электрическим дипольным моментом  $\mathbf{d}$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$  в неоднородном магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H}$ . Отбрасывая слагаемые, пропорциональные малому параметру  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ , определить силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к частице.

439. Одноименные декартовы оси двух инерциальных систем координат параллельны, а их относительное движение происходит вдоль оси  $X$ . В момент времени  $t = 0$  начала декартовых систем совпадали (см. рис. 8). Доказать, что компонента  $F_{14}$  тензора электромагнитного поля инвариантна относительно преобразования Лоренца ( $F_{14} = F'_{14}$ ), а величины  $F_{2h}$  и  $F_{3h}$  преобразуются как четырехмерные векторы.

**440.** Путем перехода к трехмерным обозначениям доказать, что ковариантные уравнения

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{4\pi}{c} j_k, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0$$

сводятся к обычным уравнениям Максвелла для напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  электромагнитного поля.

**441.** Используя закон преобразования волнового 4-вектора, определить изменение частоты (эффект Доплера) и направления скорости света (абберация света) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Исследовать полученные формулы в предельном случае  $V \ll c$ , где  $V$  — модуль скорости относительного движения двух указанных инерциальных систем координат.

**442.** Монохроматическая плоская электромагнитная волна частоты  $\omega_1$  падает под углом  $\theta_1$  на плоское зеркало, которое движется со скоростью  $\mathbf{V}$  в направлении своей нормали навстречу падающей волне. Определить угол  $\theta_2$  отражения от движущегося зеркала и частоту  $\omega_2$  отраженной волны.

**443.** Монохроматическая плоская электромагнитная волна с плотностью энергии  $\omega_0$  падает перпендикулярно на движущееся плоское зеркало и полностью отражается от него. Определить плотность энергии  $\omega$  и импульса  $\mathbf{g}$  отраженной волны, если зеркало перемещается со скоростью  $\mathbf{V}$  навстречу падающей волне.

**444.** Инерциальная система координат  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{V}$  относительно покоящейся координатной системы  $K$ , как показано на рис. 8. Пользуясь законом преобразования тензора энергии-импульса, выразить плотность энергии  $\omega'$  плоской электромагнитной волны в системе  $K'$  через плотность энергии  $\omega$  этой же волны в покоящейся системе  $K$ , где она распространяется под углом  $\alpha$  к направлению скорости  $\mathbf{V}$ .

**445.** Эллипсоид вращения с полуосями  $a$  и  $b$ , имеющий идеально отражающую поверхность, движется со скоростью  $\mathbf{V}$  навстречу падающей электромагнитной волне, напряженность электрического поля которой  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$ . Ось симметрии эллипсоида, совпадающая с полуосью  $b$ , параллельна вектору  $\mathbf{V}$ . В системе координат, связанной с эллипсоидом, определить силу  $\mathbf{F}$ , приложенную к нему в среднем по времени за

период колебания волны. В указанной системе координат длина падающей электромагнитной волны мала по сравнению с поперечным размером эллипсоида, так что позади него находится резко очерченная область тени.

## § 2. Излучение быстро движущегося заряда

446. Заряд  $e$  совершает финитное движение с нерелятивистской скоростью  $v$ . Разлагая векторный потенциал Лиенара — Вихерта в ряд по параметру  $v/c$  и по времени запаздывания электромагнитного сигнала в пределах области движения заряда, определить величину этого потенциала и напряженность магнитного поля в волновой зоне с учетом слагаемых, которые по порядку величины меньше главного члена разложения в  $v^2/c^2$  раз.

447. Используя потенциалы Лиенара — Вихерта, определить напряженности электрического и магнитного полей произвольно движущегося заряда.

448. Пользуясь общей формулой (V. 47) углового распределения интенсивности излучения релятивистской частицы, определить интенсивность излучения  $dI$  в телесный угол  $d\Omega$  в двух случаях: а) скорость  $v$  и ускорение  $\dot{v}$  частицы параллельны; б) скорость и ускорение взаимно перпендикулярны.

449. Скорость  $v$  и ускорение  $\dot{v}$  заряда  $e$  параллельны. Определить полную интенсивность  $I$  излучения по всем направлениям. Исследовать полученную формулу в ультрарелятивистском случае, а также при малых скоростях заряда  $v^2 \ll c^2$ .

450. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется параллельно напряженности  $E$  постоянного однородного электрического поля. Доказать, что скорость потери энергии  $\left(-\frac{d\mathcal{E}_\Pi}{dt'}\right)_{\text{изл}}$  частицей на излучение в запаздывающий момент времени  $t'$ , вычисленная при помощи формул (V. 48) и (V. 51), а также формулы (V. 58), имеет одно и то же значение. Здесь  $\mathcal{E}_\Pi$  — энергия частицы во внешнем электрическом поле.

451. Двигаясь со скоростью, по порядку величины равной скорости света, электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  попадает в однородное постоянное электрическое поле с напряженностью  $E$ . В момент  $t_0 = 0$  влета во внешнее электрическое поле скорость электрона перпендику-

лярна вектору  $\mathbf{E}$ , а его энергия равна  $\mathcal{E}_0$ . Определить энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную по истечении времени  $t$  после влета, считая ее малой по сравнению с кинетической энергией электрона.

452. Быстрый электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  влетает со скоростью  $v_0$  в полупространство, в котором напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля постоянна, однородна и параллельна вектору  $v_0$ . Пренебрегая обратным влиянием излучения на движение электрона, определить энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , потерянную им за время пребывания во внешнем поле.

453. Расстояние  $l$  и разность потенциалов  $\phi$  между пластинами плоского конденсатора поддерживаются постоянными. Перпендикулярно пластинам в направлении вектора напряженности электрического поля пролетает протон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Его начальная скорость  $v_0$  по абсолютной величине сравнима со скоростью света. Найти энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную протоном за время пролета через конденсатор.

454. Релятивистская частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  влетает в полупространство, в котором напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля однородна, постоянна и параллельна граничной плоскости. Начальная скорость  $v_0$  частицы перпендикулярна вектору  $\mathbf{H}$  и составляет угол  $\pi/4$  с граничной плоскостью. Определить энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную за время движения в магнитном поле. Рассмотреть два случая: а) сила Лоренца в начальный момент времени направлена в полупространство, занятое магнитным полем; б) сила Лоренца направлена в сторону свободного полупространства.

455. Перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с напряженностью  $\mathbf{H}$  движется электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  энергия электрона  $\mathcal{E}_0$ , а его скорость  $v_0$  по порядку величины равна скорости света. Найти закон убывания энергии  $\mathcal{E}$  электрона, обусловленный излучением. В полученной формуле сделать предельный переход к малой начальной скорости электрона  $v_0^2 \ll c^2$ .

456. В некоторый момент времени частица с массой  $m$  и положительным зарядом  $e$  движется со скоростью  $\mathbf{v}$  параллельно прямолинейному постоянному току силы  $\mathbf{J}$  на расстоянии  $r$  от него. Внутренний электрический дипольный момент  $\mathbf{d}$  частицы перпендикулярен скорости  $\mathbf{v}$  и находится в плоскости, в которой лежит траек-

тория и течет ток. Отбрасывая малые слагаемые, пропорциональные  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ , найти интенсивность  $I$  излучения в указанный момент времени.

457. Электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает на большом расстоянии  $l$  от неподвижного ядра, имеющего заряд  $Z|e|$ . Пренебрегая искривлением траектории и считая изменение скорости электрона очень малым по сравнению с ее начальным значением  $v_0$ , определить энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную за время пролета. Показать, что в предельном случае  $v_0^2 \ll c^2$  полученный результат совпадает с ответом задачи 294.

458. Релятивистская частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетает на большом расстоянии  $l$  от покоящегося электрического диполя с моментом  $\mathbf{d}$ . Во время движения изменение скорости частицы пренебрежимо мало по сравнению с ее начальным значением  $v_0$ . Пренебрегая искривлением траектории, найти энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную за время пролета в двух случаях: а) дипольный момент  $\mathbf{d}$  перпендикулярен плоскости движения; б) дипольный момент  $\mathbf{d}$  параллелен скорости частицы.

459. Предполагая, что в предыдущей задаче электрический дипольный момент  $\mathbf{d}$  перпендикулярен скорости  $v_0$  релятивистской частицы и лежит в плоскости движения, вычислить проекцию излученного импульса на направление вектора  $v_0$ .

460. На большом расстоянии  $l$  от неподвижного нейтрона, имеющего магнитный момент  $\mu$ , пролетает электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Его скорость  $v_0$  на бесконечно большом расстоянии от нейтрона по порядку величины равна скорости света. Считая приближенно траекторию электрона прямолинейной, а изменение скорости во время движения очень малым, определить полную энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную в двух случаях: а) магнитный момент  $\mu$  перпендикулярен плоскости движения; б) магнитный момент  $\mu$  параллелен скорости электрона.

461. Предполагая, что в предыдущей задаче магнитный момент  $\mu$  нейтрона перпендикулярен скорости  $v_0$  электрона и лежит в плоскости движения, вычислить проекцию излученного импульса на направление вектора  $v_0$ .

462. По бесконечной прямой течет постоянный линейный ток  $J$ . Перпендикулярно току на расстоянии  $l$  от него пролетает релятивистская частица с массой  $m$



и зарядом  $e$ . Считая приблизительно траекторию прямой, а скорость  $v$  частицы неизменной, определить полную энергию  $\mathcal{E}_{\text{изл}}$ , излученную за время полета.

463. В начальный момент времени  $t_0 = 0$  ультрарелятивистская частица с массой  $m$ , зарядом  $e$  и энергией  $\mathcal{E}_0$  влетает в однородное постоянное электрическое поле под прямым углом к вектору  $\mathbf{E}$ . Пренебрегая искривлением траектории, определить закон убывания энергии  $\mathcal{E}$  частицы в промежутке времени, пока ее скорость близка к скорости света.

464. Под некоторым углом к вектору  $\mathbf{H}$  однородного постоянного магнитного поля движется ультрарелятивистская частица с массой  $m$  и зарядом  $e$ . В начальный момент времени  $t_0 = 0$  ее энергия  $\mathcal{E}_0$ . Определить закон убывания энергии  $\mathcal{E}$  частицы в интервале времени, пока ее скорость близка к скорости света.

465. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в произвольном силовом поле  $\mathbf{F}$ . Представить скорость потери энергии частицей на излучение (V.58) как функцию ее скорости  $v$  и ускорения  $\dot{v}$ .

466. В результате комптон-эффекта покоившийся электрон приобрел скорость  $v$ , по абсолютной величине близкую к скорости света. Заряд электрона  $e$ . Определить энергию  $d\mathcal{E}_\omega$ , излученную электроном в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ .

467. Пользуясь общей формулой (V.60) для энергии  $d\mathcal{E}_{\text{н\omega}}$ , излученной в телесный угол  $d\Omega$  на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , и полагая в ней скорость  $v$  заряда  $e$  малой по сравнению со скоростью света, определить спектральное разложение полной энергии излучения  $d\mathcal{E}_\omega$  с учетом малых членов порядка  $v^2/c^2$ . На основе полученного результата найти интенсивность излучения  $I$ , которая определена формулой (IV.16).

468. При помощи некоторого устройства заряд  $e$  совершает быстрые гармонические колебания  $z = a \cos \omega_0 t$  вдоль оси  $Z$ . Определить среднюю за период  $T = 2\pi/\omega_0$  интенсивность  $dI_n$  излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  на  $n$ -й гармонике с частотой  $\omega_n = n\omega_0$ .

469. Заряд  $e$  вращается по окружности радиуса  $R$  с постоянной по модулю скоростью  $v = R\omega_0$ . Определить среднюю за период  $T = 2\pi/\omega_0$  интенсивность  $dI_n$  излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  на  $n$ -й гармонике с частотой  $\omega_n = n\omega_0$ .

**470.** Заряды  $e_1$  и  $e_2$  совершают гармонические колебания  $z_1 = a_1 \cos \omega_0 t$  и  $z_2 = a_2 \cos \omega_0 t$  вдоль двух бесконечно близких прямых, параллельных оси  $Z$ . Определить среднюю за период  $T = 2\pi/\omega_0$  интенсивность  $dI_n$  излучения в элемент телесного угла  $d\Omega$  на  $n$ -й гармонике с частотой  $\omega_n = n\omega_0$ .

**471.** Определить предельную энергию  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ , которой может обладать электрон с массой  $m$  и зарядом  $e$  после пролета с прицельным расстоянием  $l$  в кулоновском поле  $Q/r$  покоящегося ядра.

**472.** Определить предельную энергию  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$  ультрарелятивистского протона с массой  $m$  и зарядом  $e$  после пролета с прицельным расстоянием  $l$  через магнитное поле Земли, характеризуемое магнитным моментом  $\mu$ . Последний перпендикулярен плоскости движения протона.

**473.** Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  пролетела с прицельным расстоянием  $l$  мимо покоящегося электрического диполя с моментом  $\mathbf{d}$ . Вектор  $\mathbf{d}$  параллелен скорости частицы. Определить предельную энергию  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ , которой может обладать частица после пролета.

**474.** На расстоянии  $l$  от бесконечной прямолинейной нити, равномерно заряженной с постоянной линейной плотностью  $q$ , пролетает ультрарелятивистская частица с массой  $m$  и зарядом  $e$ . Ее скорость перпендикулярна нити. Определить предельную энергию  $\mathcal{E}_{\text{кр}}$ , которую может иметь частица после пролета около заряженной нити.

**475.** Решить предыдущую задачу, считая, что статическое распределение заряда отсутствует  $q = 0$ , а по нити течет постоянный линейный ток  $J$ .

## Г л а в а I

### ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

#### § 1. Уравнения Максвелла и граничные условия в электростатике

1. а)  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ; б)  $(\mathbf{a}r) \mathbf{k} - 2(\mathbf{a}k) \mathbf{r} + (kr) \mathbf{a}$ ; в)  $(\mathbf{a}r) \mathbf{k} \sin kr - \mathbf{a} \cos kr$ ;  
 г)  $\frac{3(dr) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{d}}{r^3}$ ; д)  $-\left[ \frac{df(r)}{dr} F(r) + f(r) \frac{dF(r)}{dr} \right] \frac{\mathbf{r}}{r}$ ;  
 е)  $-\frac{dF}{df} \frac{df}{d(\mathbf{a}r)} \mathbf{a}$ .

2. Нельзя, так как ротор заданной векторной функции отличен от нуля:  $\text{rot } \mathbf{E} = 2\mathbf{a}$ .

3. Напряженность электростатического поля внутри полой области должна удовлетворять однородным уравнениям Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Поэтому для ответа на поставленный вопрос необходимо вычислить ротор и дивергенцию заданного поля:

а) можно ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ); б) нельзя ( $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{a} \mathbf{b}$ ); в) можно, если  $\mathbf{a} \mathbf{b} = 0$  ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = 3\mathbf{a} \mathbf{b}$ ); г) нельзя ( $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = -2\mathbf{a} \mathbf{b}$ ); д) нельзя ( $\text{rot } \mathbf{E} = 3(\mathbf{a}r) \mathbf{k} - (\mathbf{a}k) \mathbf{r}$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{a}(k \times \mathbf{r})$ ); е) нельзя ( $\text{rot } \mathbf{E} = 3(\mathbf{r} \times \mathbf{c})$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = -2(\mathbf{c}r)$ ); ж) нельзя ( $\text{rot } \mathbf{E} = (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cos kr - (\mathbf{b}r)(\mathbf{k} \times \mathbf{a}) \sin kr$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos kr - (\mathbf{a}k)(\mathbf{b}r) \sin kr$ ); з) можно ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ); и) можно ( $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ).

4. а)  $\frac{b^2}{4\pi}$ ; б)  $\frac{gr}{\pi}$ ; в)  $\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$ ; г)  $\rho_0 \cos \theta$  при  $r < R$  и 0 при  $r > R$ ; д)  $\rho_0 \cos \psi$  при  $r < R$  и 0 при  $r > R$ .

6. Нет.

7. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Стокса (Пл.17) и уравнением электростатики (I.1).

8. Заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$  заполняет следующие поверхности: а) декартову плоскость  $XY$  с  $\sigma = E_0/2\pi$ ; б) сферу радиуса  $R$  с  $\sigma = Q/4\pi R^2$ ; в) цилиндрическую поверхность радиуса  $R$  с  $\sigma = q/4\pi R$ .

## § 2. Электростатическая теорема Гаусса

9. а) Напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля однородно заряженного шара направлена по радиусу, а модуль вектора  $\mathbf{E}$  зависит от расстояния  $r$  до центра шара. Эти выводы вытекают из сферической симметрии расположения зарядов. В качестве вспомогательной поверхности в электростатической теореме Гаусса следует выбрать концентрическую сферу, так как подынтегральная функция  $E = E(r)$  постоянна на этой сфере и выносится за знак интеграла:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E.$$

Для области внутри шара из теоремы Гаусса получаем

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{16\pi^2}{3} r^3 \rho, \quad E_1 = \frac{4\pi}{3} \rho r.$$

Снаружи шара

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{16\pi^2}{3} R^3 \rho, \quad E_2 = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \frac{r}{r^3}.$$

Потенциал электрического поля находится путем решения уравнения

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -E(r),$$

правая часть которого равна  $E_1(r)$  внутри и  $E_2(r)$  — вне шара. Интегрирование этого уравнения дает

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} \rho r^2 + c_1 \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho R^3}{r} + c_2 \quad \text{при } r \geq R.$$

Константы интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяются из дополнительных условий  $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ ,  $\varphi_2(\infty) = 0$ .

Окончательно потенциал электрического поля принимает вид

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho R^2}{3} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3r} \quad \text{при } r \geq R;$$

$$\text{б) } E_1 = 2\pi\rho r, \quad E_1 = \pi\rho (R^2 - r^2) \quad \text{при } r \leq R.$$

$$E_2 = \frac{2\pi\rho R^2 r}{r^2}, \quad E_2 = 2\pi\rho R^2 \ln \frac{R}{r} \quad \text{при } r \geq R,$$

где радиус-вектор  $\mathbf{r}$  точки наблюдения направлен по радиусу ци-

линдра, а произвольная постоянная в потенциале выбрана из условия  $\varphi_1(R) = \varphi_2(R) = 0$ ;

$$\text{в) } E_1 = 4\pi\rho x 1_x, \quad \varphi_1 = -2\pi\rho x^2 \quad \text{при } |x| \leq L,$$

$$E_2 = 4\pi\rho L \frac{x}{|x|} 1_x, \quad \varphi_2 = 2\pi\rho L (L - 2|x|) \quad \text{при } |x| \geq L.$$

Начало декартовой системы координат лежит в плоскости симметрии пластины, а ось  $X$  перпендикулярна к ней. Произвольная постоянная в потенциале выбрана из условия  $\varphi_1(0) = 0$ .

10. а)  $E_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 4\pi R\sigma$  при  $r < R$ ,  $E_2 = \frac{4\pi R^2\sigma r}{r^3}$ ,  $\varphi_2 = \frac{4\pi R^2\sigma}{r}$  при  $r > R$ ; б)  $E_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$  при  $r < R$ ,  $E_2 = \frac{4\pi\sigma Rr}{r^2}$ ,  $\varphi_2 = 4\pi\sigma R \ln \frac{R}{r}$  при  $r > R$ ; в)  $E = 2\pi\sigma \frac{x}{|x|} 1_x$ ,  $\varphi = -2\pi\sigma |x|$ , где  $x$  — координата точки наблюдения, отсчитываемая от заряженной плоскости.

$$11. \Phi = \pi^2 a R^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$12. E = \frac{er}{r^3} \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] e^{-2r/a}; \quad E = \frac{er}{r^3} \quad \text{при } r \ll a, \\ E = \frac{2er}{a^2 r} e^{-2r/a} \quad \text{при } r \gg a.$$

$$13. E_1 = 0, \quad \varphi_1 = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) r dr \quad \text{при } r \leq R_1; \quad E_2 = \frac{4\pi r}{r^3} \int_{R_1}^r \rho(\xi) \xi^2 d\xi, \\ \varphi_2 = 4\pi \left( \int_r^{R_2} \rho(\xi) \xi d\xi + \frac{1}{r} \int_{R_1}^r \rho(\xi) \xi^2 d\xi \right) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2; \\ E_3 = \frac{4\pi r}{r^3} \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) r^2 dr, \quad \varphi_3 = \frac{4\pi}{r} \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) r^2 dr \quad \text{при } r \geq R_2.$$

$$14. E = \frac{4\pi r}{r^2} \int_0^r \rho(\xi) \xi d\xi, \quad \varphi = 4\pi \int_r^R \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \rho(\xi) \xi d\xi d\eta.$$

$$15. E = 4\pi 1_x \int_0^x \rho(|\xi|) d\xi, \quad \varphi = 4\pi \int_0^x (\xi - x) \rho(|\xi|) d\xi.$$

16. Рассмотрим тело, образованное вращением силовой линии вокруг оси  $X$ . Предположим, что эта силовая линия соединяет оба заряда. Тогда поток напряженности суммарного электрического поля через любое поперечное сечение полученного тела вращения имеет

одно и то же численное значение. Этот поток можно выразить через заряд  $e_1$  или  $e_2$ , если стягивать поверхность поперечного сечения сначала к точке расположения заряда  $e_1$ , а затем к  $e_2$ . Приравняв оба выражения, получаем

$$2\pi e_1 (1 - \cos \theta_1) = 2\pi |e_2| (1 - \cos \theta_2),$$

$$\theta_2 = 2 \arcsin \left( \sqrt{\frac{e_1}{|e_2|}} \sin \frac{\theta_1}{2} \right).$$

Все силовые линии, входящие в заряд  $e_2$ , образуют тело вращения, которое касается поверхности прямого кругового конуса с углом  $\theta_0$  при вершине, находящейся в точке расположения заряда  $e_1$ . Угол  $\theta_0$  определяется из соотношения

$$2\pi e_1 (1 - \cos \theta_0) = 4\pi |e_2|.$$

Первая силовая линия, выходящая из заряда  $e_1$  и уходящая в плоскости  $XU$  на бесконечность, касается поверхности упомянутого тела вращения. Поэтому

$$\theta_0 = 2 \arcsin \sqrt{\frac{|e_2|}{e_1}}.$$

Если предположить  $\theta_\infty \neq 0$ , то силовая линия, уходящая в плоскости  $XU$  на бесконечность, на весьма больших расстояниях от зарядов лежит на поверхности прямого кругового конуса с углом  $\theta_\infty$  при вершине. Внутри этого конуса силовые линии отсутствуют, так как он образован вращением первой силовой линии, уходящей на бесконечность. С другой стороны, на очень больших расстояниях электрическое поле системы двух зарядов с высокой точностью совпадает с полем точечного заряда  $e_1 + e_2$ , которое является сферически-симметричным. Полученное противоречие приводит к выводу  $\theta_\infty = 0$ .

$$17. \psi_1 = \frac{|q_2|}{q_1} \psi_2, \quad \psi_0 = \frac{\pi |q_2|}{q_1}.$$

$$18. e_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} e_1.$$

19. Распределение объемной плотности заряда находится при помощи уравнения Максвелла  $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}$  везде, кроме точки  $\mathbf{r} = 0$ , которая является особой. В этой точке расположен точечный заряд, так как напряженность электрического поля при  $r \rightarrow 0$  обращается в бесконечность, как  $1/r^2$ . Величину точечного заряда можно опре-

делить по теореме Гаусса, если стягивать вспомогательную замкнутую сферическую поверхность к точке  $\mathbf{r} = 0$ . Окончательно получаем

$$\rho = e \left[ \delta(\mathbf{r}) - \frac{b^2}{4\pi r} e^{-br} \right], \quad Q = 0.$$

$$20. \quad E = 2q \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|^2} - \frac{\mathbf{r}}{r^2} \right), \quad \Phi = 2q \ln \frac{r}{|\mathbf{r} - \mathbf{l}|};$$

$$E = 2q \left( \frac{2(\mathbf{l}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^4} - \frac{\mathbf{l}}{r^2} \right), \quad \Phi = \frac{2q(\mathbf{l}\mathbf{r})}{r^2} \quad \text{при } r \gg l.$$

Здесь  $\mathbf{l}$  — вектор, проведенный от отрицательной нити к положительной. Начало радиус-вектора  $\mathbf{r}$  лежит на отрицательной нити, к которой он перпендикулярен.

21.  $E = 2\pi\sigma \left( \frac{x}{|x|} \mathbf{l}_x + \frac{y}{|y|} \mathbf{l}_y + \frac{z}{|z|} \mathbf{l}_z \right)$ . Декартовы оси совпадают с линиями пересечения заряженных плоскостей.

22. Не изменяя электрическое поле данной заряженной системы, заполним полость положительным зарядом с объемной плотностью  $\rho$  и отрицательным с объемной плотностью  $-\rho$ . В результате получим два однородно заряженных шара, из которых больший — положительный, а меньший — отрицательный. По принципу суперпозиции напряженность электрического поля внутри меньшего шара равна сумме напряженностей, созданных положительным

$$E_+ = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}$$

и отрицательным

$$E_- = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}'$$

шарами в отдельности. Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы, проведенные в точку наблюдения из центров большего и меньшего шаров. Напряженность суммарного электрического поля однородна и равна

$$E = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{l},$$

где  $\mathbf{l}$  — вектор, проведенный от центра заданного шара к центру полости. Его модуль равен расстоянию между указанными центрами. Найденное электрическое поле существует также внутри полости до заполнения ее положительным и отрицательным зарядами.

23.  $E = 2\rho l$ , где  $\mathbf{l}$  — вектор, проведенный от оси цилиндра к оси полости.

24.  $E = 2\pi\sigma\mathbf{n} - 2\sigma\mathbf{r}/r^2$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль заряженной плоскости, направленная в сторону точки наблюдения,  $r$  — расстояние от точки наблюдения до оси щели, а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, перпендикулярный этой оси.

### § 3. Применение общего решения уравнения Пуассона

$$25. \varphi = 2\pi\sigma (\sqrt{z^2 + R^2} - |z|), \quad E_x = E_y = 0, \quad E_z = 2\pi\sigma \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right); \quad \varphi = \frac{\pi R^2 \sigma}{|z|}, \quad E_z = \frac{\pi R^2 \sigma z}{|z|^3} \quad \text{при } |z| \gg R.$$

Координата  $z$  отсчитывается от плоскости диска.

$$26. \quad E = 2\pi z \left( \frac{2\rho}{3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) l_z \quad \text{при } |z| \leq R;$$

$$E = 2\pi z \left( \frac{2R^3 \rho}{3|z|^3} + \frac{\sigma}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) l_z \quad \text{при } |z| \geq R.$$

Координата  $z$  отсчитывается от центра шара.

$$27. \quad \varphi = q \ln \left| \frac{x + l + \sqrt{(x + l)^2 + y^2 + z^2}}{x - l + \sqrt{(x - l)^2 + y^2 + z^2}} \right|.$$

$$28. \quad \varphi = \pi \rho \left[ (z + h) \sqrt{(z + h)^2 + R^2} - (z - h) \sqrt{(z - h)^2 + R^2} - 2(z^2 + h^2) + R^2 \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + y^2 + z^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + y^2 + z^2}} \right| \right] \quad \text{при } |z| \leq h;$$

$$\varphi = \pi \rho \left[ (z + h) \sqrt{(z + h)^2 + R^2} - (z - h) \sqrt{(z - h)^2 + R^2} - 4h|z| + R^2 \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right| \right] \quad \text{при } |z| \geq h.$$

Начало координат расположено в центре цилиндра. После предельного перехода  $R \rightarrow 0$  и  $\pi R^2 \rho \rightarrow q$  наружный потенциал принимает вид

$$\varphi = q \ln \frac{|z| + h}{|z| - h},$$

что совпадает с потенциалом электрического поля отрезка, лежащего на оси  $Z$  между точками  $z_1 = -h$  и  $z_2 = h$  и заряженного равномерно с линейной плотностью  $q$ .

$$29. \text{ а) } \varphi = \frac{2\pi R q}{\sqrt{z^2 + R^2}}, \quad \text{где } z - \text{расстояние до плоскости кольца};$$

$$\text{ б) } \varphi = 2\pi R \sigma \ln \left| \frac{z + h + \sqrt{(z + h)^2 + R^2}}{z - h + \sqrt{(z - h)^2 + R^2}} \right|, \quad \text{где начало координат расположено в центре цилиндрической поверхности};$$

$$\text{ в) } \varphi = 2\pi \sigma (\sqrt{z^2 + R_2^2} - \sqrt{z^2 + R_1^2}), \quad \text{где } z - \text{расстояние до плоскости, на которой лежат заряды};$$



г)  $\varphi = \frac{2\pi\sigma R}{z} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z - R|)$ , где координата  $z$  отсчитывается от центра кривизны полусферы;

д)  $\varphi = \frac{2\pi\rho}{3z} \left[ (z^2 + R^2)^{3/2} - 2z^3 + \frac{3R^2z}{2} - R^3 \right]$  при  $0 \leq z \leq R$ ,  
 $\varphi = \frac{2\pi\rho}{3z} \left[ (z^2 + R^2)^{3/2} - z^3 - \frac{3R^2z}{2} + R^3 \right]$  при  $z \geq R$ ,  $\varphi =$   
 $= \frac{2\pi\rho}{3z} \left[ (z^2 + R^2)^{3/2} + z^3 + \frac{3R^2z}{2} - R^3 \right]$  при  $z \leq 0$ , где координата  $z$  отсчитывается от центра усеченного шара.

$$30. \varphi = 2\pi\sigma \left[ \frac{R}{z} (\sqrt{z^2 + R^2} - |z - R|) - \sqrt{z^2 + R^2} \right];$$

$$\varphi = \pi\sigma z \quad \text{при } |z| \ll R,$$

$$\varphi = -2\pi\sigma |z| \quad \text{при } |z| \gg R.$$

31.  $E = \frac{\pi\rho_0}{a} (1 - e^{aR}) I_z$ . Орт  $I_z$  направлен по оси симметрии в сторону выпуклости полусферы.

32. Выберем начало координат в центре шара. Если точка наблюдения со сферическими координатами  $r$  и  $\theta$  расположена внутри шара, то область интегрирования по переменной  $r'$  в интеграле (I.11) разобьем на две области:  $0 \leq r' \leq r$  и  $r \leq r' \leq R$ . В первой воспользуемся разложением (П5.11), а во второй — (П5.12). При определении потенциала снаружи шара используем разложение (П5.12). В результате получим

$$\varphi_1(r, \theta) = \pi\rho_0 r \left( \frac{4}{3} R - r \right) \cos \theta \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3r^2} \cos \theta \quad \text{при } r \geq R.$$

33. Оси  $X$  и  $Y$  декартовой системы координат выберем в плоскости кольца, а начало координат поместим в его центр. Потенциал в произвольной точке наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint \frac{q d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1)$$

где интеграл берется по длине окружности радиуса  $R$ , лежащей в плоскости  $XY$  с центром в начале координат. В области  $r > R$  воспользуемся разложением (П5.11). Тогда потенциал (1) в произвольной точке наблюдения со сферическими координатами  $r$ ,  $\theta$  и  $\psi$  представится в виде двойной суммы

$$\varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi q Y_{lm}^*(\theta, \psi)}{2l+1} \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} \int_0^{2\pi} Y_{lm} \left( \frac{\pi}{2}, \psi' \right) d\psi'.$$

Если учесть формулы (П5.9) и (П5.8), то последнее выражение переходит в более простое:

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(0) P_l(\cos \theta).$$

Значение полинома Лежандра в нулевой точке дается формулами (П4.6) и (П4.7), так что окончательно в области  $r > R$  получаем

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} P_{2k}(\cos \theta).$$

При  $r < R$  аналогично находим

$$\varphi(r, \theta, \psi) = 2\pi q \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} P_{2k}(\cos \theta).$$

Найденный потенциал не зависит от азимутального угла  $\psi$ , т. е. является аксиально-симметричным. В точках на оси кольца ( $r = |z|$ ,  $\theta = 0$ ) он изображается в виде рядов:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi R q}{|z|} \left[ 1 + \frac{R^2}{z^2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{R^2}{z^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) + \dots \right] \\ &\quad \text{при } |z| > R, \\ \varphi &= 2\pi q \left[ 1 + \frac{z^2}{R^2} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{z^2}{R^2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) + \dots \right] \\ &\quad \text{при } |z| < R, \end{aligned}$$

которые представляют собой разложение следующих функций:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\pi R q}{|z|} \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \quad \text{при } |z| > R, \\ \varphi &= \frac{2\pi q}{\sqrt{1 + z^2/R^2}} \quad \text{при } |z| < R. \end{aligned}$$

Последние выражения совпадают с потенциалом на оси кольца, полученным в задаче 29а).

$$\begin{aligned} 34. \quad \varphi &= \frac{Q}{R} + \frac{Q}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \\ &\quad \text{при } r \leq R, \\ \varphi &= \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \\ &\quad \text{при } r \geq R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
35. \quad \varphi &= \frac{Q}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\cos \theta), \\
E_r &= \frac{Q}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\cos \theta), \\
E_{\theta} &= \frac{Q}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k-1} (k-1)! (k+1)!} \times \\
&\quad \times \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} \frac{P_{2k-1}(\cos \theta) - \cos \theta P_{2k}(\cos \theta)}{\sin \theta}, \\
E_{\psi} &= 0.
\end{aligned}$$

36. Область интегрирования в интеграле (I.11) разбиваем на две области:  $0 \leq r' \leq r$  и  $r \leq r' \leq R$ . В первой области справедливо разложение (П5.11), а во второй — (П5.12). Окончательно

$$\begin{aligned}
\varphi &= \pi R^2 \left\{ 1 - \frac{r^2}{3R^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (2k-1) k! (k+1)!} \times \right. \\
&\quad \times \left[ \frac{4k+3}{2(k+2)} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \right] P_{2k+1}(\cos \theta) \Big\}.
\end{aligned}$$

#### § 4. Сила и энергия в электростатике

$$37. F = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

38. Поместим начало декартовой системы координат в центр шара. Сила, приложенная к верхней половине шара, выражается через максвелловский тензор натяжений  $T_{\alpha\beta}$  следующим образом:

$$F_z = \int_{S_0} T_{z\beta} n_{\beta} dS + \int_{S_1} T_{z\beta} n_{\beta} dS,$$

где  $S_0$  и  $S_1$  — основание и поверхность полусферы. Другие компоненты силы равны нулю:  $F_x = F_y = 0$ . При интегрировании по основанию следует иметь в виду, что векторы  $\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$  взаимно ортогональны:

$$\int_{S_0} T_{z\beta} n_{\beta} dS = \frac{1}{8\pi} \int_{S_0} E^2 dS = \frac{Q^2}{16R^2}.$$

Между тем на поверхности полусферы векторы  $\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$  и  $\mathbf{n}$  параллельны, поэтому

$$\int_{S_1} T_{3\beta} n_\beta dS = \frac{Q^2}{8\pi R^4} \int_{S_1} n_3 dS = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

В результате

$$F_z = \frac{3Q^2}{16R^2}.$$

Другой способ вычисления:

$$F_z = \rho \int E_z dV = \frac{4\pi}{3} \rho^2 \int r n_3 dV = \frac{3Q^2}{16R^2},$$

где интеграл берется по верхней половине шара.

39. Абсолютная величина искомой силы имеет вид

$$F = \frac{4\pi}{3} \rho^2 R^3.$$

$$40. W = \frac{3Q^2}{5R}.$$

$$41. W = \frac{Q^2}{2R}, \quad Q = 4\pi R^2 \sigma.$$

42. Если удалить меньший шар, то внутри большего появится полость, в которой электрическое поле однородно:

$$\mathbf{E} = \frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{l},$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен от центра большого шара к центру полости (см. задачу 22). Поэтому сила взаимного отталкивания шаров

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi}{3} \rho Q \mathbf{l}.$$

Чтобы найти потенциал электрического поля внутри указанной полости, воспользуемся методом, изложенным при решении задачи 22. Тогда потенциал будет слагаться из суммы потенциалов, созданных положительным и отрицательным шарами в отдельности:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{2\pi}{3} \rho (3R_2^2 - r^2) - \frac{2\pi}{3} \rho (3R_1^2 - r'^2) = \\ &= \frac{2\pi}{3} \rho [3(R_2^2 - R_1^2) + l^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{l}], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы, проведенные в одну и ту же точку наблюдения из центров шара и полости, причем  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{l}$ ,

Искомая энергия взаимодействия представляет собой потенциальную энергию заряда  $Q$  во внешнем поле  $\varphi(r)$ , созданном большим шаром,

$$U = \frac{2\pi}{3} \rho Q [3(R_2^2 - R_1^2) - l^2].$$

43.  $F = 2\pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 l$ ,  $U = \pi^2 \rho_1 \rho_2 R_1^2 (R_2^2 - R_1^2 - l^2)$ , где вектор  $l$  направлен от оси наружного цилиндра к оси внутреннего. Его модуль равен расстоянию между осями цилиндров.

44.  $\varphi = e \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-2r/a}$ ;  $\varphi = \frac{e}{r}$  при  $r \ll a$ ,  $\varphi = \frac{e}{a} e^{-2r/a}$  при  $r \gg a$ ;  $U = -\frac{e^2}{a}$ ,  $W = \frac{5e^2}{16a}$ .

$$45. U = 2\pi R \sigma e (\sqrt{5 - 4 \cos \theta_0} - 1).$$

46.  $F = 2\pi \rho e h \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right) l_z$ . Орт  $l_z$  направлен по оси конуса от основания к вершине.

$$47. U = 2\pi R \sigma e.$$

48.  $U = \frac{3Qe}{2R}$ . Значение  $U$  не изменится, если заряд  $Q$  равномерно распределить по объему сферы.

$$49. U = -\frac{e^2}{9a}.$$

## § 5. Уравнения Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями

50. В пространстве выделены две области  $z \leq 0$  и  $z \geq 0$  с потенциалами  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z)$  и  $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, z)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

и граничным условиям на плоскости  $XY$ :

$$\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2(x, y, 0)}{\partial z} = 4\pi\sigma_0 \cos(ax + by),$$

$$\varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0).$$

Искомый потенциал

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \varphi_1(x, y, z) & \text{при } z \leq 0, \\ \varphi_2(x, y, z) & \text{при } z \geq 0 \end{cases}$$

убывает при  $|z| \rightarrow \infty$ , так как полный поверхностный заряд равен нулю. Поскольку граничное условие на плоскости  $XY$  периодически,

а функция  $\cos(ax + by)$  при действии оператора  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  воспроизводится, потенциалы следует искать в виде

$$\varphi_1 = f_1(z) \cos(ax + by), \quad \varphi_2 = f_2(z) \cos(ax + by).$$

Подставляя эти функции в уравнение Пуассона и сокращая на общий множитель, находим

$$\frac{d^2 f_1}{dz^2} - \lambda^2 f_1 = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dz^2} - \lambda^2 f_2 = 0,$$

где  $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Решение последних уравнений должно убывать при  $|z| \rightarrow \infty$ . Таким путем потенциалы определяются с точностью до постоянных множителей:

$$\varphi_1 = a_1 e^{\lambda z} \cos(ax + by), \quad \varphi_2 = a_2 e^{-\lambda z} \cos(ax + by).$$

Постоянные множители  $a_1$  и  $a_2$  находятся из граничных условий. Окончательно имеем

$$\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} e^{-\lambda|z|} \cos(ax + by).$$

51. Искомый потенциал равен сумме потенциалов, созданных каждой заряженной плоскостью (принцип суперпозиции). Поэтому достаточно исследовать электрическое поле только одной заряженной плоскости. Потенциалы, созданные двумя другими заряженными плоскостями, находятся простым переобозначением координат точки наблюдения. Метод вычисления потенциала электрического поля одной заряженной плоскости изложен в предыдущей задаче. В результате получаем

$$\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} [e^{-\lambda|z|} \sin a_1 x \sin b_1 y + \\ + e^{-\lambda|y|} \sin a_2 x \sin b_2 z + e^{-\lambda|x|} \sin a_3 y \sin b_3 z].$$

52. Электрическое поле, созданное периодическим распределением заряда в неограниченной области, также периодически во всем пространстве. Причем оно обращается в нуль, если положить  $\rho_0 = 0$ . Поэтому искомый потенциал определяется как частное решение уравнения Пуассона

$$\varphi = \frac{4\pi\rho_0}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \sin l_1 x \sin l_2 y \sin l_3 z.$$

Напряженность электрического поля вычисляется по формуле (I.6):

$$E = - \frac{4\pi\rho_0}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} (l_1 \cos l_1 x \sin l_2 y \sin l_3 z l_x + \\ + l_2 \sin l_1 x \cos l_2 y \sin l_3 z l_y + l_3 \sin l_1 x \sin l_2 y \cos l_3 z l_z).$$

### 53. Потенциал

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{при } z \leq 0, \\ \varphi_2 & \text{при } z \geq 0 \end{cases}$$

является решением уравнений

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos \mathbf{kr}, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

с дополнительными условиями

$$\frac{\partial \varphi_1(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2(x, y, 0)}{\partial z}, \quad \varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0), \quad (1)$$

$$|\varphi_1(x, y, -\infty)| < \infty, \quad |\varphi_2(x, y, \infty)| < \infty. \quad (2)$$

Последние два условия вытекают из того, что точечные и линейные заряды отсутствуют, а полный заряд равен нулю. Поскольку

$$\cos \mathbf{kr} = \cos(k_1x + k_2y) \cos k_3z - \sin(k_1x + k_2y) \sin k_3z,$$

поставленная задача допускает разделение переменных:

$$\varphi_1 = f_1(z) \cos(k_1x + k_2y) + F_1(z) \sin(k_1x + k_2y) + \frac{4\pi\rho_0}{k^2} \cos \mathbf{kr},$$

$$\varphi_2 = f_2(z) \cos(k_1x + k_2y) + F_2(z) \sin(k_1x + k_2y),$$

где последнее слагаемое потенциала  $\varphi_1$  является частным решением уравнения Пуассона. Функции  $f_i(z)$  и  $F_i(z)$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяют одному и тому же уравнению:

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2} - \lambda^2 f_i = 0,$$

в котором  $\lambda = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . Принимая во внимание условие (2), находим

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a_1 e^{\lambda z}, & F_1(z) &= b_1 e^{\lambda z}, \\ f_2(z) &= a_2 e^{-\lambda z}, & F_2(z) &= b_2 e^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

Постоянные множители определяются из граничных условий (1), так что

$$\varphi_1 = \frac{2\pi\rho_0}{k^2} \left\{ 2 \cos \mathbf{kr} + \left[ \frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1x + k_2y) - \cos(k_1x + k_2y) \right] e^{\lambda z} \right\},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi\rho_0}{k^2} e^{-\lambda z} \left[ \cos(k_1x + k_2y) + \frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1x + k_2y) \right].$$

**54.** Если распределение заряда во всем пространстве четно или нечетно относительно какой-нибудь из декартовых координат, то потенциал обладает той же четностью. В данном случае  $\varphi(x, y, -z) = -\varphi(x, y, z)$ .

Задача решается методом разделения переменных \*)

$$\varphi(x, y, z) = f(z) \sin l_1 x \sin l_2 y,$$

где  $f(z)$  — нечетная функция, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \lambda^2 f = 0 \quad \text{при} \quad |z| > a,$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - \lambda^2 f = -4\pi\rho_0 \sin l_3 z \quad \text{при} \quad |z| < a,$$

где  $\lambda = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ . Поскольку полный заряд пластины равен нулю, функция  $f(z)$  убывает при  $|z| \rightarrow \infty$ . С учетом сказанного находим

$$f(z) = b_1 e^{\lambda(z+a)} \quad \text{при} \quad z \leq -a,$$

$$f(z) = b_2 (e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) + \frac{4\pi\rho_0 \sin l_3 z}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \quad \text{при} \quad |z| \leq a,$$

$$f(z) = -b_1 e^{-\lambda(z-a)} \quad \text{при} \quad z \geq a.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий (I.8) и (I.9). Окончательно получаем

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left[ \left( \sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a - \sin l_3 a \right] \times \\ \times e^{\lambda(z+a)} \sin l_1 x \sin l_2 y \quad (z \leq -a),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left[ \sin l_3 z - e^{-\lambda a} \left( \sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) \operatorname{sh} \lambda z \right] \sin l_1 x \sin l_2 y \\ (|z| \leq a),$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 \left[ \sin l_3 a - \left( \sin l_3 a + \frac{l_3}{\lambda} \cos l_3 a \right) e^{-\lambda a} \operatorname{sh} \lambda a \right] \times \\ \times e^{-\lambda(z-a)} \sin l_1 x \sin l_2 y \quad (z \geq a),$$

где обозначено  $\varphi_0 = 4\pi\rho_0 / (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$ .

55. Если в распределении зарядов имеется определенная симметрия, то потенциал обладает тем же свойством. В данной задаче есть аксиальная симметрия. Поэтому искомый потенциал не зависит от азимутального угла  $\psi$ .

Потенциалы внутри и снаружи шара обозначим через  $\varphi_1 = \varphi_1(r, \theta)$  и  $\varphi_2 = \varphi_2(r, \theta)$ . Они удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_0 \cos \theta, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad (1)$$

---

\*) В общем виде изложение метода разделения переменных можно найти в книге [7].



и граничным условиям на поверхности шара

$$\frac{\partial \varphi_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2(R, \theta)}{\partial r}, \quad \varphi_1(R, \theta) = \varphi_2(R, \theta). \quad (2)$$

Применяя метод разделения переменных, следует учесть, что функция  $\cos \theta$  воспроизводится при действии угловой части оператора Лапласа в сферических координатах (П1.46):

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \right) = -\frac{2}{r^2} \cos \theta.$$

Поэтому естественно положить

$$\varphi_1 = F_1(r) \cos \theta, \quad \varphi_2 = F_2(r) \cos \theta.$$

Тогда множитель  $\cos \theta$  сократится в правых и левых частях уравнений и дополнительных условий, после чего задача сведется к более простой для радиальных функций  $F_1(r)$  и  $F_2(r)$ . Согласно исходным уравнениям (1) радиальные функции удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} - 2F_1 = -4\pi \rho_0 r^2, \quad (3)$$

$$r^2 \frac{d^2 F_2}{dr^2} + 2r \frac{dF_2}{dr} - 2F_2 = 0 \quad (4)$$

и дополнительным условиям при  $r = R$ , которые вытекают из соотношений (2). Частное решение первого уравнения, очевидно,  $F_{1 \text{ част}} = -\pi \rho_0 r^2$ , а общее решение однородных уравнений (3) и (4) ищется в виде  $cr^s$ , где  $c$  и  $s$  — константы, подлежащие определению. Подставляя  $cr^s$  в уравнение (4) и сокращая на общий множитель, получаем квадратное уравнение

$$s^2 + s - 2 = 0$$

с корнями  $s_1 = 1$  и  $s_2 = -2$ . Значит, общие решения уравнений (3) и (4) имеют вид

$$F_1 = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} - \pi \rho_0 r^2, \quad F_2 = c_3 r + \frac{c_4}{r^2}.$$

Из непрерывности потенциала в точке  $r = 0$ , а также из  $\varphi_2(\infty, \theta) = 0$  вытекает  $c_2 = c_3 = 0$ . Две другие постоянные определяются из условий сшивки радиальных функций и их производных в точке  $r = R$ . Опуская дальнейшие выкладки, приведем окончательный результат:  $\varphi_1 = \pi \rho_0 r (4/3 R - r) \cos \theta$ ,  $E_{1r} = 2\pi \rho_0 (r - 2/3 R) \cos \theta$ ,

$$E_{1\theta} = \pi \rho_0 (4/3 R - r) \sin \theta, \quad E_{1\psi} = 0 \quad \text{при } r \leq R; \quad \varphi_2 = \frac{\pi \rho_0 R^4}{3r^2} \cos \theta,$$

$$E_{2r} = \frac{2\pi \rho_0 R^4}{3r^3} \cos \theta, \quad E_{2\theta} = \frac{\pi \rho_0 R^4}{3r^3} \sin \theta, \quad E_{2\psi} = 0 \quad \text{при } r \geq R.$$

$$56. \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \rho_0 (3R - 2r) r \cos \psi, \quad E_{1r} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 (4r - 3R) \cos \psi, \\ E_{1\psi} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 (3R - 2r) \sin \psi, \quad E_{1z} = 0 \quad \text{при} \quad r \leq R; \quad \varphi_2 = \\ = \frac{2\pi}{3} \rho_0 \frac{R^3}{r} \cos \psi, \quad E_{2r} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \psi, \quad E_{2\psi} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 \frac{R^3}{r^2} \sin \psi, \\ E_{2z} = 0 \quad \text{при} \quad r \geq R.$$

$$57. \quad \text{При } r < R: \quad \varphi_1 = \frac{4\pi}{3} \sigma r \cos \theta, \quad E_{1r} = -\frac{4\pi}{3} \sigma_0 \cos \theta, \quad E_{1\theta} = \\ = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \sin \theta, \quad E_{1\psi} = 0; \quad \text{при } r > R: \quad \varphi_2 = \frac{4\pi R^3 \sigma_0}{3r^2} \cos \theta, \quad E_{2r} = \\ = \frac{8\pi R^3 \sigma_0}{3r^3} \cos \theta, \quad E_{2\theta} = \frac{4\pi R^3 \sigma_0}{3r^3} \sin \theta, \quad E_{2\psi} = 0.$$

$$58. \quad \text{При } r < R: \quad \varphi_1 = 0, \quad E_1 = 0; \quad \text{при } r > R: \quad \varphi_2 = \\ = 2\pi \sigma_0 R \left( \frac{R}{r} - \frac{r}{R} \right) \cos \psi, \quad E_{2r} = 2\pi \sigma_0 R^2 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right) \cos \psi, \quad E_{2\psi} = \\ = 2\pi \sigma_0 R^2 \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \sin \psi, \quad E_{2z} = 0.$$

$$59. \quad E_{1r} = \frac{2\pi}{15} a (9r^2 - 5R^2) \cos \theta, \quad E_{1\theta} = \frac{2\pi}{15} a (5R^2 - 3r^2) \sin \theta, \\ E_{1\psi} = 0 \quad \text{при } r \leq R; \quad E_{2r} = \frac{8\pi a R^5}{15r^3} \cos \theta, \quad E_{2\theta} = \frac{4\pi a R^5}{15r^3} \sin \theta, \quad E_{2\psi} = 0 \\ \text{при } r \geq R.$$

60. В задаче даны две области  $r \leq R$  и  $r \geq R$  с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Уравнение Пуассона (I.7) и дополнительные условия (I.8) и (I.9) позволяют применить метод разделения переменных. Согласно соотношению (П4.18) полагаем

$$\varphi_1 = F_1(r) P_n(\cos \theta),$$

$$\varphi_2 = F_2(r) P_n(\cos \theta).$$

Радиальные функции удовлетворяют неоднородным уравнениям Эйлера

$$r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} - n(n+1) F_1 = -4\pi \rho_0 R^2 \left( \frac{r}{R} \right)^{n+2},$$

$$r^2 \frac{d^2 F_2}{dr^2} + 2r \frac{dF_2}{dr} - n(n+1) F_2 = -4\pi \rho_0 R^2 \left( \frac{R}{r} \right)^{n-1}$$

и условиям сшивки

$$\frac{\partial F_1(R)}{\partial r} = \frac{\partial F_2(R)}{\partial r}, \quad F_1(R) = F_2(R).$$

Дальнейшее аналогично вычислениям в задаче 55. Окончательно

$$\varphi_1 = 2\pi\rho_0 R^2 \left[ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \left( \frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \theta),$$

$$\varphi_2 = 2\pi\rho_0 R^2 \left[ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \left( \frac{R}{r} \right)^{n-1} P_n(\cos \theta).$$

$$61. \quad \varphi_1 = \pi\rho_0 R^2 \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi$$

при  $r \leq R$ ,

$$\varphi_2 = \pi\rho_0 R^2 \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right] \left( \frac{R}{r} \right)^{n-2} \cos n\psi$$

при  $r \geq R$ .

62. Потенциалы внутри  $\varphi_1 = \varphi_1(r, \psi)$  и снаружи  $\varphi_2 = \varphi_2(r, \psi)$  цилиндрической поверхности удовлетворяют уравнению Лапласа и граничному условию (I. 9)

$$\varphi_1(R, \psi) = \varphi_2(R, \psi) = \varphi_0 \cos n\psi.$$

Внутренняя при  $r \leq R$  и внешняя при  $r \geq R$  задачи независимо друг от друга решаются методом разделения переменных

$$\varphi_1 = F_1(r) \cos n\psi, \quad \varphi_2 = F_2(r) \cos n\psi.$$

При этом для радиальных функций  $F_1(r)$  и  $F_2(r)$  получаем уравнения Эйлера. Решая последние, следует использовать непрерывность потенциала в точке  $r = 0$ , так как внутри цилиндрической поверхности заряды отсутствуют. Кроме того, снаружи цилиндрической поверхности при увеличении  $r$  потенциал не возрастает, поскольку полный поверхностный заряд равен нулю. С учетом граничного условия (I. 9) находим

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos n\psi \quad \text{при } r \geq R.$$

Поверхностную плотность заряда определяем из граничного условия (I. 8) на цилиндрической поверхности, которое еще не использовали:

$$\sigma = \frac{n\varphi_0}{2\pi R} \cos n\psi.$$

$$63. \quad \varphi_1 = \varphi_0 \left( \frac{r}{R} \right)^l [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y_{lm}^*(\theta, \psi)] \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \left( \frac{R}{r} \right)^{l+1} [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y_{lm}^*(\theta, \psi)] \quad \text{при } r \geq R;$$

$$\sigma = \frac{2l+1}{4\pi R} \varphi_0 [Y_{lm}(\theta, \psi) - Y_{lm}^*(\theta, \psi)].$$

64. Применяем метод разделения переменных, положив

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (1)$$

Вдоль оси  $Z$  потенциал однороден. Подстановка функции (1) в уравнение Лапласа дает

$$\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{X} = -\frac{\frac{d^2Y}{dy^2}}{Y} = \lambda$$

или

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda Y = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — некоторая постоянная. Чтобы выполнялось граничное условие на плоскостях  $y = 0$  и  $y = b$ , необходимо

$$Y(0) = Y(b) = 0. \quad (4)$$

Уравнению (3) и дополнительным условиям (4) удовлетворяют функции

$$Y_n = c_n \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (5)$$

где  $c_n$  — произвольные постоянные и  $n = 0, 1, 2, \dots$ . При этом  $\lambda = (n\pi/b)^2$ .

Поскольку внутри рассматриваемой области зарядов нет, искомым потенциал при  $x \rightarrow \infty$  не возрастает. Поэтому из двух независимых решений уравнения (2) оставим только убывающую экспоненту для каждого фиксированного значения числа  $n$ :

$$X_n = b_n e^{-\frac{n\pi}{b} x}, \quad (6)$$

где  $b_n$  — произвольная постоянная.

Следовательно, частным решением уравнения Лапласа служит произведение функций (5) и (6). В общем случае уравнению Лапласа и граничным условиям на плоскостях  $y = 0$  и  $y = b$  удовлетворяет бесконечная сумма произведений  $X_n Y_n$ :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (7)$$

где введено обозначение  $a_n = c_n b_n$ .

Подберем коэффициенты  $a_n$  так, чтобы оставшееся граничное условие на плоскости  $x = 0$  также выполнялось:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{b} y = \varphi_0. \quad (8)$$

Для этого воспользуемся тем, что совокупность выражений (5) образует полную систему взаимно ортогональных функций на отрезке  $[0, b]$ . Умножая обе части равенства (8) на  $\sin \frac{m\pi}{b} y$  и интегрируя по  $y$ , получаем

$$a_m = 0 \quad \text{при} \quad m = 2k,$$

$$a_m = \frac{4\varphi_0}{\pi(2k+1)} \quad \text{при} \quad m = 2k+1,$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В результате потенциал (7) принимает вид

$$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)\pi}{b}x} \sin \frac{(2k+1)\pi}{b}y.$$

В данной задаче, как и в некоторых последующих, ответ представлен в виде бесконечного ряда, хотя последний иногда суммируется при помощи определенных математических приемов.

$$65. \varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{a}x}{2k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a}y}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{a}b} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{b}y}{2k+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi}{b}a} \right).$$

Вдоль оси  $Z$  потенциал однороден.

66. Поместим начало координат в центре полусферы, а ось  $Z$  направим вдоль оси симметрии в сторону выпуклости. Искомый потенциал  $\varphi(r, \theta)$  разложим в ряд (П4.15) по полиномам Лежандра

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) P_n(\cos \theta), \quad (1)$$

где радиальные функции  $F_n(r)$  подлежат определению. После подстановки выражения (1) в уравнение Лапласа приходим к уравнению Эйлера

$$\frac{d^2 F_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF_n}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} F_n = 0$$

с решением

$$F_n = a_n \left( \frac{r}{R} \right)^n + b_n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1},$$

где  $a_n$  и  $b_n$  — произвольные постоянные. Из непрерывности потенциала следует  $b_n = 0$ . Таким образом,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

Коэффициенты  $a_n$  подбираются так, чтобы выполнялись граничные условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(0) = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) = \varphi_0. \quad (4)$$

Из условия (3) вытекает  $a_{2k} = 0$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , так что ряды (2)–(4) содержат только нечетные полиномы. Чтобы найти оставшиеся коэффициенты  $a_{2k+1}$ , необходимо умножить обе части равенства (4) на  $P_m(\cos \theta) \sin \theta$ , проинтегрировать по углу  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$  и воспользоваться формулами (П4.9) и (П4.11). Тогда получим

$$\varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta).$$

$$67. \quad \varphi = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos \theta).$$

68. Граничное условие для потенциала  $\varphi(r, \theta)$  удобно записать в виде

$$\varphi(R, \theta) = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b) + \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } 0 \leq \theta < \pi/2, \\ -\frac{1}{2} (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

После этого потенциал разбивается на сумму двух слагаемых  $\varphi(r, \theta) = \varphi_1(r) + \varphi_2(r, \theta)$ , каждое из которых удовлетворяет своему граничному условию

$$\varphi_1(R) = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b),$$

$$\varphi_2(R, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } 0 \leq \theta < \pi/2, \\ -\frac{1}{2} (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Вид функции  $\varphi_1(r)$  очевиден, а определение потенциала  $\varphi_2(r, \theta)$  аналогично задаче 66:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b) \frac{R}{r} + \\ &+ \frac{1}{4} (\varphi_a - \varphi_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3) (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos \theta). \\ 69. \quad \varphi_1 &= \varphi_0 + \varphi_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \theta) \\ &\quad (r \leq R), \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2(k+1)} P_{2k+1}(\cos \theta) \quad (r \geq R).$$

У к а з а н и е. Удобно выбрать начало координат в центре окружности, а ось  $Z$  направить в исследуемое полупространство. В решении уравнения Лапласа в виде ряда по полиномам Лежандра следует оставлять только те слагаемые, которые непрерывны по переменной  $r$ . Это требование выделяет две области, лежащие внутри и снаружи полусферы радиуса  $R$ , в которых потенциал имеет характерную зависимость от переменной  $r$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{при} \quad r \leq R, \\ \varphi_2(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \quad \text{при} \quad R \leq r. \end{aligned}$$

Граничное условие на плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  приводит к выводу

$$\begin{aligned} a_0 &= \varphi_0, \quad b_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_{2m} = b_{2m} = 0 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \dots, \\ a_{2k+1} &\neq 0 \quad \text{и} \quad b_{2k+1} \neq 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Чтобы найти оставшиеся коэффициенты  $a_{2k+1}$  и  $b_{2k+1}$ , необходимо воспользоваться непрерывностью потенциала и его производной по  $r$  на поверхности полусферы с радиусом  $r = R$ .

$$\begin{aligned} 70. \quad \varphi_1 &= 2\pi\sigma r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos \theta) \quad (r \leq R), \\ \varphi_2 &= \frac{2\pi\sigma R^3}{r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} k! (k+1)!} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k} P_{2k+1}(\cos \theta) \quad (r \geq R). \end{aligned}$$

71. Ось  $Z$  цилиндрической системы координат совмещаем с осью цилиндрической поверхности. Вдоль этого направления потенциал однороден. Внутренний  $\varphi_1(r, \psi)$  и наружный  $\varphi_2(r, \psi)$  потенциалы вычисляются независимо друг от друга. Сместим их точку отсчета, положив

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_1(r, \psi),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} (\varphi_a + \varphi_b) + \tilde{\varphi}_2(r, \psi).$$

Новые потенциалы  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$  удовлетворяют уравнению Лапласа и граничному условию

$$\tilde{\varphi}_1(R, \psi) = \tilde{\varphi}_2(R, \psi) = \begin{cases} 1/2 (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } 0 < \psi < \pi, \\ -1/2 (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

Далее воспользуемся методом разделения переменных и будем искать решение поставленной задачи в виде

$$\tilde{\varphi}(r, \psi) = F(r) \Phi(\psi), \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 у потенциала опущены. Подставляя выражение (1) в уравнение Лапласа, получаем

$$\frac{r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right)}{F} = - \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\psi^2}}{\Phi} = \lambda.$$

Здесь  $\lambda$  — постоянная. Последнее соотношение содержит два уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{d\psi^2} + \lambda \Phi = 0, \quad (2)$$

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} - \lambda F = 0. \quad (3)$$

Первое из них имеет решение

$$\Phi = A \cos \sqrt{\lambda} \psi + B \sin \sqrt{\lambda} \psi, \quad (4)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $\lambda$  — постоянные. После изменения угла  $\psi$  от 0 до  $2\pi$  потенциал (1) должен совпасть с исходным выражением, поэтому

$$\Phi(\psi + 2\pi) = \Phi(\psi).$$

Это выполняется при условии  $\sqrt{\lambda} = n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Решение второго уравнения ищется в виде  $F = r^s$ . После подстановки в (3) и сокращения на общий множитель получим  $s^2 = n^2$  или  $s = \pm n$ . Отсюда находим

$$F = Cr^n + \frac{D}{r^n}, \quad (5)$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные постоянные. Произведение функций (4) и (5) является частным решением уравнения Лапласа. Причем внутри



цилиндрической поверхности  $D = 0$ , а снаружи  $C = 0$ , так как искомый потенциал является ограниченной функцией. Общее решение представляет собой бесконечную сумму частных:

$$\bar{\varphi}_1(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi) \quad \text{при } r \leq R,$$

$$\bar{\varphi}_2(r, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (c_n \cos n\psi + d_n \sin n\psi) \quad \text{при } r \geq R.$$

Произвольные постоянные  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  и  $d_n$  определяются из граничных условий. Непрерывность потенциала при переходе через цилиндрическую поверхность требует  $c_n = a_n$  и  $d_n = b_n$ , а нечетность функций  $\bar{\varphi}_1(R, \psi)$  и  $\bar{\varphi}_2(R, \psi)$  по переменной  $\psi$  приводит к  $a_n = 0$ . Чтобы найти  $b_n$ , умножим обе части равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin n\psi = \begin{cases} 1/2 (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } 0 < \psi < \pi, \\ -1/2 (\varphi_a - \varphi_b) & \text{при } \pi < \psi < 2\pi \end{cases}$$

на  $\sin m\psi$  и воспользуемся ортогональностью синусов при  $m \neq n$ . Тогда получим

$$b_{2k} = 0, \quad b_{2k+1} = \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi(2k+1)},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Окончательно

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \sin(2k+1)\psi \quad (r \leq R)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{2(\varphi_a - \varphi_b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \sin(2k+1)\psi \quad (r \geq R).$$

$$72. \quad \varphi_1 = 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \leq R),$$

$$\varphi_2 = 2\pi R(\sigma_a + \sigma_b) \ln \frac{R}{r} +$$

$$+ 4R(\sigma_a - \sigma_b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} + \varphi_0 \quad (r \geq R).$$

Потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого  $\varphi_0$  и однороден вдоль оси  $Z$ , совпадающей с осью цилиндрической поверхности.

73. Начало координат помещаем в центр окружности, а ось  $Z$  выбираем перпендикулярно ее плоскости. В цилиндрических координатах потенциал не зависит от полярного угла, а по переменной  $z$  является четной функцией  $\varphi(r, -z) = \varphi(r, z)$ . По методу разделения переменных будем искать решение в виде

$$\varphi(r, z) = F(r) Z(z). \quad (1)$$

После подстановки этого выражения в уравнение Лапласа находим

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) = \frac{d^2 Z}{dz^2} = C.$$

Чтобы потенциал (1) убывал при  $|z| \rightarrow \infty$ , постоянная  $C$  должна быть вещественной и положительной  $C = \lambda^2$ , где для определенности считаем  $\lambda > 0$ . Тогда

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \lambda^2 F = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (2) получаем

$$Z = a_\lambda e^{-\lambda |z|}, \quad (4)$$

где постоянная  $a_\lambda$  подлежит определению.

Ограниченное решение уравнения (3) выражается через функцию Бесселя (П6.2) нулевого порядка

$$F(r) = b_\lambda J_0(\lambda r), \quad (5)$$

умноженную на произвольную постоянную  $b_\lambda$ .

Произведение функций (4) и (5) является частным решением уравнения Лапласа, отвечающим фиксированному значению параметра  $\lambda$ , который здесь может изменяться непрерывно. Поэтому общее решение имеет вид

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \lambda c_\lambda J_0(\lambda r) e^{-\lambda |z|} d\lambda, \quad (6)$$

где ради удобства введено обозначение  $a_\lambda b_\lambda = \lambda c_\lambda$ . Коэффициент  $c_\lambda$  как функция параметра  $\lambda$  подбирается так, чтобы выполнялось граничное условие

$$\int_0^\infty c_\lambda J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Полученное соотношение является разложением в интеграл Фурье — Бесселя функции, стоящей справа этого равенства \*). Это позволяет вычислить коэффициент  $c_\lambda$  по формуле (П6.24). В результате потенциал (6) запишется в виде следующего интеграла по параметру  $\lambda$ :

$$\varphi(r, z) = \varphi_0 R \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda R) e^{-\lambda |z|} d\lambda.$$

Этот интеграл можно выразить через специальные функции, приведенные в справочнике [9].

$$74. \quad \varphi(r, z) = 2\pi\sigma R \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda R) e^{-\lambda |z|} \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

$$75. \quad \varphi(r, z) = \frac{2\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \sin R\lambda e^{-\lambda |z|} \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$\sigma = \frac{\varphi_0}{\pi^2 \sqrt{R^2 - r^2}} \quad \text{при} \quad r < R.$$

У к а з а н и е. Граничное условие на плоскости  $z = 0$ , в которой лежит диск, записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, 0) &= \varphi_0 & \text{при} \quad r < R, \\ \frac{\partial \varphi(r, 0)}{\partial z} &= 0 & \text{при} \quad r > R. \end{aligned}$$

Второе соотношение указывает на отсутствие поверхностных зарядов вне диска. Далее следует воспользоваться известными соотношениями

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \frac{\sin R\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad r < R;$$

$$\int_0^\infty J_0(r\lambda) \sin R\lambda d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r > R, \\ \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} & \text{при} \quad r < R. \end{cases}$$

---

\*) О разложении в интеграл Фурье — Бесселя см. в книгах [7, 8].

## § 6. Плотность заряда тел разной конфигурации

76.  $\rho = \frac{3a}{2\pi} \cos \psi$  при  $r < R$ ,  $\rho = 0$  при  $r > R$ .

77.  $\rho = e\delta(r) + \frac{3e}{4\pi R^3} (r < R)$ ,  $\rho = 0 (r > R)$ ;  $Q = 2e$ .

78. Сфера радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = Q/4\pi R^2$ .

79. Цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = q/4\pi R$ .

80. а)  $2R\sigma\delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$ ,  $2R\sigma\delta(r^2 + z^2 - R^2)$ ,  $\sigma\delta(r - R)$ ;

б)  $2Rq\delta(x^2 + y^2 - R^2)\delta(z)$ ,  $q\delta(r - R)\delta(z)$ ,  $\frac{q}{R}\delta(r - R)\delta(\cos \theta) = \frac{q}{R}\delta(r - R)\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ ;

в)  $q\delta(x)\delta(y)$ ,  $\frac{q}{\pi r}\delta(r)$ ,  $\frac{2q}{\pi r^2}\delta(1 - \cos^2 \theta)$ ;

г)  $\sigma\delta(z)$ ,  $\sigma\delta(z)$ ,  $\frac{\sigma}{r}\delta(\cos \theta) = \frac{\sigma}{r}\delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ ;

д)  $2R\sigma\delta(x^2 + y^2 - R^2)$ ,  $\sigma\delta(r - R)$ ,  $\sigma\delta(r \sin \theta - R)$ .

У к а з а н и е. Следует рассмотреть элемент объема  $\Delta V$ , который содержит внутри себя часть заданного распределения заряда величиной

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho dV. \quad (1)$$

Искомая объемная плотность  $\rho$  должна удовлетворять следующим требованиям. Если первоначально было задано распределение заряда на поверхности с поверхностной плотностью  $\sigma$ , то после интегрирования в (1) по поперечной координате  $\xi$ ,

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho d\xi dS,$$

выражение для заряда  $\Delta Q$  должно принять вид

$$\Delta Q = \int_{\Delta S} \sigma dS,$$

где  $\Delta S$  — часть данной заряженной поверхности, которая оказалась внутри рассматриваемого объема. Аналогично, если было задано распределение заряда на линейном контуре с линейной плотностью  $q$ ,

то после интегрирования в (1) по двум поперечным координатам  $\xi$  и  $\eta$ ,

$$\Delta Q = \int_{\Delta V} \rho \, d\xi \, d\eta \, dl,$$

выражение для заряда  $\Delta Q$  должно принять вид

$$\Delta Q = \int_{\Delta L} q \, dl,$$

где  $\Delta L$  — часть данного заряженного линейного контура, которая оказалась внутри рассматриваемого объема  $\Delta V$ .

$$81. \text{ а) } \rho = 2R\sigma\delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\eta(z), \quad \rho = 2R\sigma\delta(r^2 + z^2 - R^2)\eta(z), \quad \rho = \sigma\delta(r - R)\eta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right);$$

$$\text{б) } \rho = 2Rq\delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)\eta(y), \quad \rho = q\delta(r - R)\delta(z)\eta(\pi - \psi), \\ \rho = \frac{q}{R}\delta(r - R)\delta(\cos\theta)\eta(\pi - \psi);$$

$$\text{в) } \rho = q\delta(x)\delta(y)[\eta(z) - \eta(z - l)], \quad \rho = \frac{q}{\pi r}\delta(r)[\eta(z) - \eta(z - l)], \\ \rho = \frac{2q}{\pi r^2}\delta(1 - \cos^2\theta)\eta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)[\eta(r) - \eta(r - l)];$$

$$\text{г) } \rho = \sigma\delta(z)\eta(R^2 - x^2 - y^2), \quad \rho = \sigma\delta(z)\eta(R - r), \\ \rho = \frac{\sigma}{r}\delta(\cos\theta)\eta(R - r);$$

$$\text{д) } \rho = 2R\sigma\delta(x^2 + y^2 - R^2)[\eta(z) - \eta(z - l)], \quad \rho = \sigma\delta(r - R) \times \\ \times [\eta(z) - \eta(z - l)], \quad \rho = \sigma\delta(r \sin\theta - R)\eta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)[\eta(r) - \\ - \eta(r - \sqrt{R^2 + h^2})].$$

$$82. \rho = \frac{2q}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\frac{x^2}{a^2}}\delta\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\delta(z).$$

$$83. \rho = \frac{2\sigma}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\delta\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right).$$

84. Заряд с линейной плотностью  $q = 1/2\pi a$  равномерно распределен вдоль оси  $Z$ .

85. а) Две плоскости  $x = a$  и  $x = -a$  равномерно заряжены с поверхностной  $\sigma$ ;

б) две прямые  $x = a, z = 0$  и  $x = -a, z = 0$  равномерно заряжены с линейной плотностью  $q$ ;

в) окружность  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2$ , лежащая в плоскости  $XY$ , равномерно заряжена с линейной плотностью  $q$ ;

г) эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , лежащий в плоскости  $XY$ , заряжен с линейной плотностью  $q = \frac{aQ}{2\pi\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}$ . Полный заряд эллипса  $Q$ ;

д) эллиптическая поверхность  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  заряжена с поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi ab \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} \left( \frac{c^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{y^2}{b^2} \left( \frac{c^2}{b^2} - 1 \right)}}.$$

Полный заряд эллиптической поверхности  $Q$ .

## § 7. Дипольный момент

$$87. \rho = \frac{\sigma}{r} \delta(\theta - \theta_0) \eta(l - r), \quad \theta_0 = \arcsin \frac{R}{l}; \quad d_x = d_y = 0, \quad d_z = \frac{2}{3} \pi \sigma R l^2 \sqrt{1 - R^2/l^2}.$$

$$88. \rho = \frac{q}{r} \delta(z) \delta(\psi - \psi_0) \eta(l - r); \quad d_x = \frac{1}{2} q l^2 \cos \psi_0, \quad d_y = \frac{1}{2} q l^2 \sin \psi_0, \quad d_z = 0.$$

89. Точечный диполь с моментом  $\mathbf{d}$  является предельным случаем системы двух зарядов  $e$  и  $-e$ , расстояние  $l$  между которыми стремится к нулю, а абсолютная величина зарядов при этом обращается в бесконечность так, что

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el = \mathbf{d},$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному,

Распределение объемной плотности в случае зарядов  $e$  и  $-e$ , находящихся в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_+ = \mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_0$ , описывается функцией  $\rho_e(\mathbf{r}) = e [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_+) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_-)]$ . Если в этом выражении перейти к двойному пределу  $l \rightarrow 0$  и  $e \rightarrow \infty$ , то получим объемную плотность заряда точечного диполя

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_+) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_-)}{l} = d \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial l} \Big|_{\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0},$$

где производная в направлении вектора  $\mathbf{l}$  берется по штрихованным координатам. Согласно формулам (П1.11) и

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial l} = - \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial l},$$

полученное выражение можно переписать так:

$$\rho(\mathbf{r}) = -(\mathbf{d} \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

$$90. \varphi = \frac{\mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}.$$

$$92. U = Q \frac{dr}{r^3}; F = Q \left( \frac{3(dr)r}{r^5} - \frac{d}{r^3} \right).$$

$$93. a) F = \frac{4\pi a R^5}{5} \left( \frac{d}{r^3} - \frac{3(dr)r}{r^5} \right), N = \frac{4\pi a R^5}{5r^3} (d \times r); б) F = -\frac{4\pi a}{5} (r^2 d + 2(dr)r), N = \frac{4\pi}{5} ar^2 (d \times r).$$

$$94. F_1 = -F_2, F_2 = \frac{3}{r^7} [r^2 (d_1 d_2) - 5 (d_1 r) (d_2 r)] r + r^2 [(d_2 r) d_1 + (d_1 r) d_2]; N_1 = \frac{(d_2 \times d_1)}{r^3} + \frac{3 (d_2 r) (d_1 \times r)}{r^5}, N_2 = \frac{(d_1 \times d_2)}{r^3} + \frac{3 (d_1 r) (d_2 \times r)}{r^5}.$$

95.  $\varphi = -ar/r^3$ . Вектор  $a$  представляет собой момент точечного диполя, взятый со знаком минус.

96. Электрический дипольный момент  $P(r')dV'$  элемента объема  $dV'$ , находящегося в точке с радиус-вектором  $r'$ , создает в точке наблюдения с радиус-вектором  $r$  следующий потенциал:

$$d\varphi(r) = \frac{P(r')R}{R^3} dV',$$

где  $R = r - r'$ . По принципу суперпозиции находим потенциал, созданный электрическим дипольным моментом объема  $V$ :

$$\varphi(r) = \int_V \frac{P(r')R}{R^3} dV'. \quad (1)$$

Воспользуемся соотношением

$$\text{div}' \frac{P}{R} = \frac{\text{div}' P}{R} + P \text{grad}' \frac{1}{R},$$

где производные берутся по штрихованным координатам. Тогда интеграл (1) при помощи теоремы Гаусса — Остроградского (П1.15) преобразуется к виду

$$\varphi(r) = \oint_S \frac{P(r')}{R} dS' - \int_V \frac{\text{div}' P(r')}{R} dV'.$$

Будем неограниченно расширять объем  $V$  во все стороны. При этом интеграл по поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , обращается в нуль. Последнее обусловлено тем, что подынтегральная функция на поверхности  $S$  убывает быстрее, чем  $1/r'^3$ , в то время как поверхность интегрирования  $S$  увеличивается пропорционально  $r'^2$ . В результате

$$\varphi(r) = \int \frac{-\text{div}' P(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Сравнивая полученное выражение с общим решением уравнения Пуассона (I. 11), приходим к выводу, что распределенный электрический дипольный момент создает в пространстве такое же электрическое поле, как и заряд с объемной плотностью  $\rho(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r})$ .

## § 8. Тензор квадрупольного момента

98.  $D_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $D_{11} = D_{22} = -36ea^2$ ,  $D_{33} = 72ea^2$ ;  $\mathbf{d} = 0$ .

99. а)  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $d_3 = \frac{3}{8} QR$ ,  $D_{\alpha\beta} = 0$ ;

б)  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $d_3 = \frac{1}{2} QR$ ,  $D_{\alpha\beta} = 0$ ;

в)  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $d_3 = \frac{1}{3} QR$ ,  $D_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $D_{11} = D_{22} = QR^2/12$ ,  $D_{33} = -QR^2/6$ .

100.  $D_{\alpha\beta} = 0$ .

101. Перейдем в штрихованную систему координат, начало которой расположено в центре кривизны полусферы, а оси  $X'$ ,  $Y'$  и  $Z'$  параллельны одноименным осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . В штрихованной системе координат имеем  $d'_1 = d'_2 = 0$ ,  $d'_3 = QR/2$  и  $D'_{\alpha\beta} = 0$ . Воспользуемся законом преобразования координат

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}', \quad a_1 = a_2 = R, \quad a_3 = 0$$

и установим связь между компонентами тензоров  $D_{\alpha\beta}$  и  $D'_{\alpha\beta}$  в исходной и штрихованной системах координат:

$$D_{\alpha\beta} = D'_{\alpha\beta} + Q(3a_\alpha a_\beta - a^2 \delta_{\alpha\beta}) + 3(a_\alpha d'_\beta + d'_\alpha a_\beta) - 2ad' \delta_{\alpha\beta}.$$

Отсюда находим

$$D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$102. \quad D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2\pi} \begin{pmatrix} 5\pi & 12 & 0 \\ 12 & -\pi & 0 \\ 0 & 0 & -4\pi \end{pmatrix}.$$

103. Тензор квадрупольного момента заряженного эллипса представим в виде

$$D_{\alpha\beta} = q \oint (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dl, \quad (1)$$

где криволинейный интеграл берется по контуру эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (2)$$

Видно, что отличны от нуля лишь диагональные компоненты тензора  $D_{\alpha\beta}$ . Интеграл (1) по замкнутому контуру равен учетверенному интегралу по дуге эллипса, лежащей в первой четверти плоско-



сти ХУ. Интегрирование по указанной дуге эллипса заменяем интегрированием по отрезку  $[0, a]$  оси Х;

$$D_{11} = 4q \int_0^a (2x^2 - y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

где функция  $y = y(x)$  дается выражениями (2). При помощи замены переменной  $x = a\xi$  и формулы  $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$  последний интеграл запишем так:

$$D_{11} = 4qa^3 \int_0^1 [3\xi^2 - 1 + \varepsilon^2(1 - \xi^2)] \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2\xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi.$$

Подынтегральное выражение разлагаем в ряд по малому параметру  $\varepsilon^2$  и оставляем первые два слагаемых этого ряда. Возникающие при этом интегралы по переменной  $\xi$  являются табличными. Окончательно получаем

$$D_{11} = \pi qa^3 \left(1 + \frac{3}{8} \varepsilon^2\right), \quad D_{22} = \pi qa^3 \left(1 - \frac{15}{8} \varepsilon^2\right),$$

$$D_{33} = -2\pi qa^3 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2\right), \quad D_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

104. Искомый тензор квадрупольного момента запишем как

$$D_{\alpha\beta} = \sigma \oint (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) dS,$$

где интегрирование ведется по замкнутой эллиптической поверхности

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

В случае тела вращения достаточно вычислить только компоненту  $D_{33}$ . Воспользуемся заменой переменных

$$x = ax', \quad y = ay', \quad z = bz'$$

и перейдем к интегрированию по сфере единичного радиуса

$$D_{33} = \sigma a^2 \oint [2b^2 z'^2 - a^2 (x'^2 + y'^2)] \times \\ \times \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \left[ \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2 \right]}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2}} dS',$$

где

$$\begin{aligned} z'^2 &= 1 - x'^2 - y'^2, \\ b^2 &= a^2 (1 + \varepsilon^2) \quad \text{при } b > a, \\ b^2 &= a^2 (1 - \varepsilon^2) \quad \text{при } b < a. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение разлагаем в ряд по малому параметру  $\varepsilon^2$  и оставляем слагаемые с наименьшей его степенью. В результате находим

$$D_{33} = \pm \frac{32\pi}{15} \sigma a^4 \varepsilon^2,$$

где верхний знак берется при  $b > a$ , а нижний — для  $b < a$ . Другие компоненты искомого тензора

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = -\frac{1}{2} D_{33}, \\ D_{\alpha\beta} &= 0 \quad \text{при } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$

105.

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= 12ea^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D'_{\alpha\beta} = 12ea^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

106.  $d_1 = d (\cos \alpha - 1), \quad d_2 = d \sin \alpha, \quad d_3 = 0;$

$$D_{\alpha\beta} = ad \begin{pmatrix} 4(1 + \cos \alpha) & 3 \sin \alpha & 0 \\ 3 \sin \alpha & -2(1 + \cos \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -2(1 + \cos \alpha) \end{pmatrix}.$$

Указание. Каждый точечный диполь с моментом  $\mathbf{d}$  следует рассматривать как предельный случай системы двух зарядов  $e$  и  $-e$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга, которые неограниченно сближаются, возрастая по абсолютной величине. При этом

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el = \mathbf{d}, \quad (1)$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному. В компонентах тензора квадрупольного момента, написанного для отдельной системы двух зарядов  $e$  и  $-e$ , необходимо перейти к двойному пределу  $l \rightarrow 0$  и  $e \rightarrow \infty$  и учесть (1).

107.  $D_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $D_{11} = D_{22} = \frac{Q}{5} (a^2 - b^2)$ ,  $D_{33} = -\frac{2Q}{5} (b^2 - a^2)$ . После поворота эллипсоида тензор  $D_{\alpha\beta}$  принимает вид

$$D_{\alpha\beta} = \frac{Q(b^2 - a^2)}{5} \begin{pmatrix} 3 \sin^2 \alpha - 1 & 0 & 3 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 3 \cos^2 \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

108.

$$D_{11} = \frac{Q}{5} [a^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) + b^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) - c^2],$$

$$D_{22} = \frac{Q}{5} [a^2 (3 \sin^2 \alpha - 1) + b^2 (3 \cos^2 \alpha - 1) - c^2],$$

$$D_{33} = \frac{Q}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

$$D_{12} = \frac{3Q}{5} (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$D_{13} = D_{23} = 0.$$

$$109. \quad D_{\alpha\beta} = \frac{QR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3 \sin^2 \alpha & 3 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 3 \sin \alpha \cos \alpha & 3 \sin^2 \alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

$$110. \quad E_{\gamma}(\mathbf{r}) = D_{\alpha\beta} x_{\alpha} \left( \frac{5}{2} \frac{x_{\beta} x_{\gamma}}{r^7} - \frac{\delta_{\beta\gamma}}{r^5} \right).$$

111.  $\Phi = \frac{3}{r^5} a_{\alpha\beta} (3x_{\alpha} x_{\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta})$ . При помощи соотношения  $a_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} r^2 = a_{\sigma\sigma} \delta_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}$  и формул (П2.16) и (П2.22) потенциал можно привести к каноническому виду

$$\Phi = \frac{D_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}}{2r^5},$$

в котором тензор

$$D_{\alpha\beta} = 3 [3 (a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}) - 2a_{\sigma\sigma} \delta_{\alpha\beta}]$$

симметричен, а его след равен нулю  $D_{\sigma\sigma} = 0$ . Следовательно, компоненты  $D_{\alpha\beta}$  составляют тензор квадрупольного момента. Величина  $a_{\alpha\beta}$  пропорциональна тензору квадрупольного момента в том случае, если  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$  и  $a_{\sigma\sigma} = 0$ .

$$112. \quad d_x = \frac{i}{\sqrt{2}} (Q_1^{(1)} - Q_{-1}^{(1)}), \quad d_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_1^{(1)} + Q_{-1}^{(1)}), \quad d_z = -iQ_0^{(1)};$$

$$D_{11} = Q_0^{(2)} - \sqrt{\frac{3}{2}} (Q_2^{(2)} + Q_{-2}^{(2)}), \quad D_{12} = i\sqrt{\frac{3}{2}} (Q_{-2}^{(2)} - Q_2^{(2)}),$$

$$D_{13} = \sqrt{\frac{3}{2}} (Q_1^{(2)} - Q_{-1}^{(2)}), \quad D_{22} = Q_0^{(2)} + \sqrt{\frac{3}{2}} (Q_2^{(2)} + Q_{-2}^{(2)}),$$

$$D_{23} = -i\sqrt{\frac{3}{2}} (Q_1^{(2)} + Q_{-1}^{(2)}), \quad D_{33} = -2Q_0^{(2)}.$$

$$113. \quad a) \quad U = ea^2 \frac{\partial^2 \Phi(0)}{\partial x^2};$$

$$б) \quad U = e\Phi(0) - \frac{2ea}{\sqrt{3}} \frac{\partial \Phi(0)}{\partial x} + \frac{ea^2}{12} \left( 3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi(0);$$

$$в) U = ea^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(0);$$

$$г) U = Q\varphi(0) + \frac{Q}{10} \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(0).$$

$$114. \quad U = Q\varphi(0) + \frac{Q}{8} \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(0);$$

$$F = QE(0) + \frac{Q}{8} \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E(0),$$

где  $E(0) = -\text{grad } \varphi(0)$  — напряженность внешнего электрического поля.

$$115. \quad F = QE + (d \text{ grad}) E + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 E}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

где напряженность электрического поля и ее производные берутся в точке, расположенной внутри заряженной системы. Эта точка служит началом декартовой системы координат, в которой вычислены величины  $d$  и  $D_{\alpha\beta}$ .

$$116. \quad N_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} d_\beta E_\gamma + \frac{1}{3} e_{\alpha\beta\gamma} D_{\beta\delta} \frac{\partial E_\gamma}{\partial x_\delta},$$

где напряженность электрического поля и ее производные берутся в точке, расположенной внутри заряженной области. Эта точка служит началом декартовой системы координат, в которой вычислены величины  $d$  и  $D_{\alpha\beta}$ .

$$117. \quad F = -36ea^2 \frac{\partial^2 E(0)}{\partial z^2};$$

$$N_x = 72ea^2 \frac{\partial E_z(0)}{\partial y}, \quad N_y = -72ea^2 \frac{\partial E_x(0)}{\partial z}, \quad N_z = 0.$$

$$118. \quad N_x = N_y = 0, \quad N_z = \frac{eql^3}{x^3} \sin 2\psi_0.$$

## § 9. Поле на больших расстояниях от заряженной системы

$$119. \quad а) \varphi = \frac{\pi}{2} qR^3 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3};$$

$$б) \varphi = \frac{\pi}{4} \rho h R^2 \left( R^2 - \frac{4}{3} h^2 \right) \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3};$$

$$в) \varphi = \pi \sigma h R \left( R^2 - \frac{2}{3} h^2 \right) \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3};$$

$$г) \varphi = \frac{ql^3}{3} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}.$$

$$120. \text{ а) } \varphi = \frac{ea^2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1);$$

$$\text{б) } \varphi = \frac{e}{r} - \frac{2ea}{\sqrt{3} r^2} \sin \theta \sin \psi - \frac{ea^2}{12r^3} [2 + 3 \sin^2 \theta (1 - 4 \cos^2 \psi)];$$

$$\text{в) } \varphi = -\frac{3ea^2}{2r^3} \sin^2 \theta \sin 2\psi.$$

$$121. D_{\alpha\beta} = 6ad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi = 6ad \frac{xz}{r^5}.$$

$$122. \psi_0 = \pi \pm 2 \sqrt{\frac{2l}{3x_0}}.$$

$$123. \varphi = \frac{4QR}{\pi r^3} \left[ y - R + \frac{3Ry}{r^2} (x + y) \right].$$

У к а з а н и е. Воспользоваться методом, изложенным при решении задачи 101.

$$124. \varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{r^3} (Rx + hz) + \frac{Q}{2r^5} \left[ \left( \frac{9}{4} R^2 - \frac{4}{3} h^2 \right) x^2 - \left( \frac{3}{4} R^2 + \frac{4}{3} h^2 \right) y^2 + \left( \frac{8}{3} h^2 - \frac{3}{2} R^2 \right) z^2 + 6Rhxz \right].$$

У к а з а н и е. Воспользоваться методом, изложенным при решении задачи 101.

125.

$$\text{а) } \varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{4r^3} [3 (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi) \sin^2 \theta - a^2 - b^2];$$

$$\text{б) } \varphi = \frac{Q}{r} + \frac{1}{6} Q (b^2 - a^2) \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3};$$

$$\text{в) } \varphi = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{6r^3} [a^2 (3 \sin^2 \theta \cos^2 \psi - 1) + b^2 (3 \sin^2 \theta \sin^2 \psi - 1) + c^2 (3 \cos^2 \theta - 1)].$$

$$126. \quad \varphi(r, \theta, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-i)^l}{r^{l+1}} Q_0^{(l)} P_l(\cos \theta),$$

$$Q_0^{(2k)} = 2\pi\sigma R^2 \delta_{0k}, \quad Q_0^{(2k+1)} = \frac{i2\pi\sigma R^{2k+3} (2k)!}{2^{k+1} k! (k+1)!},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$127. \quad F_x = F_z = 0, \quad F_y = \frac{12QRd}{\pi z^4};$$

$$N_x = \frac{4QRd}{\pi z^3}, \quad N_y = N_z = 0.$$

$$128. U = -\frac{Q(dr)}{r^3} + \frac{3Q}{10r^5} \left\{ \left[ (dr) \left( 1 - \frac{5x^2}{r^2} \right) + 2d_1x \right] a^2 + \right. \\ \left. + \left[ (dr) \left( 1 - \frac{5y^2}{r^2} \right) + 2d_2y \right] b^2 + \left[ (dr) \left( 1 - \frac{5z^2}{r^2} \right) + 2d_3z \right] c^2 \right\}.$$

$$129. \mathbf{F} = \frac{eQ}{z^2} \left[ \left( 1 - \frac{3R^2}{2z^2} \right) \mathbf{1}_z - \frac{2R}{\pi z} \mathbf{1}_y \right].$$

$$130. \Delta F_x = \frac{3Qex}{10r^7} [5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(3a^2 + b^2 + c^2)],$$

$$\Delta F_y = \frac{3Qey}{10r^7} [5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(a^2 + 3b^2 + c^2)],$$

$$\Delta F_z = \frac{3Qez}{10r^7} [5(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^2(a^2 + b^2 + 3c^2)].$$

$$131. U = -3888 \frac{e^2 a^4}{L^5}.$$

## § 10. Двойной электрический слой

$$132. \varphi(z) = 2\pi\tau \left( 1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \frac{z}{|z|} \quad \text{при } z \neq 0, \quad \varphi(0) = 0;$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi\tau R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

$$133. \varphi(z) = 2\pi\tau \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad \text{при } z > R, \quad \varphi(R) = -\sqrt{2}\pi\tau,$$

$$\varphi(z) = -2\pi\tau \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad \text{при } z < R.$$

$$134. \text{ В цилиндрических координатах } \varphi = 2\tau(\pi - \psi) \quad \text{при } 0 < \psi < 2\pi, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \psi = 0; \quad E_r = E_z = 0, \quad E_\psi = 2\tau/r.$$

$$135. F_x = F_y = 0, \quad F_z = -\frac{2\pi\tau e R^2}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}}.$$

136. Над положительной стороной электрического двойного слоя  $\varphi = 2\pi\tau$ . На его поверхности  $\varphi = 0$ . Под отрицательной стороной  $\varphi = -2\pi\tau$ .

137. Потенциал двойного электрического слоя  $\varphi = \tau\Omega$ , где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна положительная сторона слоя (для отрицательной рассуждения аналогичны). Пусть слой сместился параллельно самому себе на величину  $da$ . Элемент  $d\mathbf{l}'$  контура  $L$ , на который натянут слой, опишет поверхность  $da \times d\mathbf{l}'$ . Она видна из точки наблюдения под телесным углом  $\frac{(da \times d\mathbf{l}') \mathbf{R}}{R^3}$ , где вектор  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  проведен от элемента поверхности в точку наблюдения.

Полное изменение телесного угла при смещении слоя

$$d\Omega = da \oint_L \frac{dl' \times R}{R^3}. \quad (1)$$

Потенциал в точке наблюдения изменится соответственно на величину  $d\varphi = \tau d\Omega$ . Если слой неподвижен, а точка наблюдения переместилась в противоположную сторону на величину  $d\epsilon = -da$ , то численное значение телесного угла (1) не изменится. Однако изменение потенциала в этом случае выражается через напряженность электрического поля следующим образом:

$$d\varphi = -d\epsilon \tau \oint_L \frac{dl' \times R}{R^3} = -d\epsilon E.$$

Ввиду произвольности вектора  $d\epsilon$  находим

$$E(r) = \tau \oint_L \frac{dl' \times (r - r')}{|r - r'|^3}.$$

## Г л а в а II

### ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### § 1. Уравнения Максвелла и граничные условия в магнитостатике

138. Если заданное магнитное поле удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , то заведомо найдется такое распределение тока снаружи полой области и на ее поверхности, которое создает это поле. Напротив, если ротор или дивергенция вектора  $\mathbf{H}$  внутри полости отличны от нуля, то никакое распределение тока не может создать данное магнитное поле. В связи с этим необходимо вычислить ротор и дивергенцию заданной векторной функции:

а) можно ( $\text{rot } \mathbf{H} = 0, \text{div } \mathbf{H} = 0$ );

б) нет ( $\text{rot } \mathbf{H} = (I_x + I_y + I_z)b, \text{div } \mathbf{H} = 0$ );

в) можно ( $\text{rot } \mathbf{H} = 0, \text{div } \mathbf{H} = 0$ ).

139. Нет, так как  $\text{div } \mathbf{j} \neq 0$ .

$$140. \text{ а) } \mathbf{j} = \frac{c}{2\pi} \left[ f(r) \mathbf{a} + \frac{df(r)}{dr} \frac{(\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}))}{2r} \right];$$

$$\text{б) } \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} [3(\mathbf{a}r) \mathbf{b} - (\mathbf{a}b) \mathbf{r}];$$

$$\text{в) } j_r = j_\theta = 0, j_\varphi = \frac{acr}{4\pi} \sin \theta \text{ при } r \leq R, j = 0 \text{ при } r > R;$$

$$\text{г) } j_r = 0, j_\varphi = \frac{bcr}{2\pi}, j_z = \frac{gc}{2\pi} \text{ при } r \leq R, j = 0 \text{ при } r > R.$$

144. Из уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  следует  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ . Поэтому внутри заданной ограниченной области текут замкнутые токи, токовые линии которых являются замкнутыми кривыми. В связи с этим разобьем объемный интеграл на сумму интегралов

$$\int \mathbf{j} dV = \sum_i \int_{L_i} \mathbf{j} dl_i \quad (1)$$

по отдельным замкнутым весьма тонким трубкам, для которых



справедлива замена

$$\mathbf{j} dV_i \rightarrow J_i d\mathbf{l}_i,$$

где  $J_i$  — линейный ток  $i$ -й трубки, а  $d\mathbf{l}_i$  — элемент оси  $L_i$  этой токовой трубки. Ось каждой трубки направлена по соответствующим замкнутым токовым линиям. Равенство (1) тем точнее, чем тоньше выбраны токовые трубки. Линейный интеграл  $\oint_{L_i} d\mathbf{l}_i$  равен нулю, подобно сумме векторов, составляющих замкнутый многоугольник. Поэтому  $\int \mathbf{j} dV = 0$ .

145. Для произвольного объема  $V$  имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \operatorname{div} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = - \frac{1}{c} \int_V \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

где использовано  $\operatorname{div}' \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ . В последнем интеграле дивергенция берется по штрихованным координатам. Используя теорему Гаусса — Остроградского (П1.15), найдем

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{c} \oint_S \frac{j_n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1)$$

Если токи текут в ограниченном объеме  $V$ , то  $j_n(\mathbf{r}')$  обращается в нуль на поверхности интегрирования, и условие Лоренца выполнено. Если токи текут в неограниченном пространстве, то при расширении объема  $V$  во все стороны поверхностный интеграл (1) также обращается в нуль. Это связано с тем, что поверхность  $S$  возрастает пропорционально  $r'^2$ , в то время как подынтегральная функция убывает быстрее, чем  $1/r'^2$ .

146. Постоянный ток должен течь в ограниченной области. В этом случае выражение  $\frac{1}{2c} \int \mathbf{j} \mathbf{A} dV$  инвариантно по отношению к преобразованию калибровки (П. 10) и имеет физический смысл энергии магнитного поля.

148. а)  $i_x = i_y = 0$ ,  $i_z = \frac{cH}{4\pi}$  в плоскости  $x = a$ ,  $i_x = i_y = 0$ ,  $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$  в плоскости  $x = b$ ;

б)  $i_x = i_y = 0$ ,  $i_z = -\frac{cH}{4\pi}$  в плоскостях  $x = a$  и  $x = b$ ;

в)  $i_r = i_z = 0$ ,  $i_\psi = \frac{cH}{4\pi}$ , где ось  $Z$  цилиндрической системы координат направлена по оси цилиндрической поверхности параллельно вектору  $\mathbf{H}$ .

149. а) В цилиндрических координатах  $\mathbf{j} = \delta(r-R)\mathbf{i}_0$ ;

б) в декартовых координатах  $\mathbf{j} = J\delta(x)\delta(y)\mathbf{i}_z$ ;

в) в декартовых координатах  $\mathbf{j} = \delta(z)\mathbf{i}_0$ ;

г) в цилиндрических координатах  $j_r = j_z = 0$ ,  $j_\psi = J\delta(r-R)\delta(z)$ ;

д) в сферических координатах  $j_r = j_\theta = 0$ ,  $j_\psi = \sigma\omega r\delta(r-R)\sin\theta$ ;

е) в сферических координатах  $j_r = j_\theta = 0$ ,  $j_\psi = \sigma\omega \sin\theta_0\delta(\theta-\theta_0)$ .

150. Нет, так как  $\operatorname{div} \mathbf{j} \neq 0$ , где  $\mathbf{j} = i_0\delta(x)(\mathbf{i}_ye^{-ay^2} + \mathbf{i}_ze^{-az^2})$ .

151. а) В плоскостях  $x = a$  и  $x = -a$  течет ток с поверхностной плотностью  $i_0$ ; б) по прямым  $x = a$  и  $x = -a$ , лежащих в плоскости  $XY$ , параллельно оси  $Y$  течет линейный ток  $J$ .

152. Натянем на контур  $L$  произвольную поверхность  $S$ , которая превращает окружающее пространство в односвязную область. В точках, не лежащих на токовом контуре  $L$ , уравнение Максвелла (II.2) однородно  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$ . Согласно теореме (П1.22) магнитное поле в этих точках можно представить как  $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$ , где  $\Phi = \Phi(x, y, z)$  — некоторая функция, заданная в односвязной области. Возьмем ее в таком виде, чтобы второе уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  также удовлетворялось при подстановке выражения  $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \Phi$ . Для этого функция  $\Phi$  должна быть решением уравнения Лапласа  $\nabla^2\Phi = 0$  с дополнительным условием, вытекающим из теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля

$$\oint_C \mathbf{H} \boldsymbol{\tau} dl = \frac{4\pi}{c} J. \quad (1)$$

Здесь  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к контуру интегрирования  $C$ , который охватывает линейный ток  $J$ . Кроме того, функция  $\Phi$  обращается в нуль на бесконечности, если токовый контур  $L$  лежит в ограниченной области. Так определенная функция  $\Phi$  называется скалярным потенциалом магнитного поля.

Поверхность  $S$ , натянутая на токовый контур  $L$ , рассекает контур интегрирования  $C$  в некоторой точке. Обозначим точками 2 и 1 начало и конец рассеянного контура  $C'$ . Значение потенциала в этих точках по разные стороны поверхности  $S$  обозначим через  $\Phi_2$  и  $\Phi_1$ . Интеграл (1) по рассеянному контуру

$$-\int_{C'} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} dl = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{4\pi}{c} J. \quad (2)$$

Как видно, скалярный потенциал  $\Phi$  претерпевает скачок при переходе через поверхность  $S$ , натянутую на токовый контур  $L$ , хотя производная  $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\tau}$  остается непрерывной. При этом величина  $\Phi$  формально совпадает с потенциалом двойного электрического слоя  $S$ , плотность дипольного момента которого равна  $J/c$ . Таким образом, скалярный потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению  $\nabla^2\Phi = 0$  и

дополнительному условию (2) на фиксированной поверхности  $S$ , натянутой на токовый контур  $L$ .

153. В качестве фиксированной поверхности, натянутой на токовый контур, выберем полуплоскость  $y = 0, x \geq 0$ . Уравнение  $\nabla^2 \Phi = 0$  с дополнительным условием

$$\oint_{C_r} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} dl = -\frac{4\pi}{c} J$$

решаем в цилиндрических координатах. Здесь контуром интегрирования  $C_r$  служит окружность произвольного радиуса  $r$  с центром на оси  $Z$ . Ее плоскость перпендикулярна линейному току  $J$ . Контур интегрирования  $C_r$  пересекается в некоторой точке полуплоскостью  $y = 0, x \geq 0$ .

Из условий задачи вытекает, что искомая функция  $\Phi$  не зависит от координат  $z$  и  $r$ , а зависимость от полярного угла  $\psi$  линейная  $\Phi = \Phi_0 + a\psi$ , где  $\Phi_0$  и  $a$  — постоянные. Дополнительное условие выполняется при  $a = -2J/c$  и произвольном  $\Phi_0$ . Таким образом, потенциал определен с точностью до произвольного слагаемого. Окончательно

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{2J}{c} \psi, \quad H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J}{cr}.$$

Функция  $\Phi$  претерпевает скачок  $\frac{4\pi}{c} J$  при переходе через полуплоскость  $y = 0, x \geq 0$ , которая соприкасается с линейным током  $J$ . Если произвольную постоянную положить равной  $\Phi_0 = \frac{4\pi}{c} J$ , то величина  $\Phi$  формально совпадает с потенциалом двойного электрического слоя  $y = 0, x \geq 0$  с плотностью дипольного момента  $J/c$  (см. задачу 134).

## § 2. Магнитный момент

$$154. \mu_x = \mu_y = 0, \mu_z = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

$$155. \mu = \frac{4\pi a}{c} \int_0^\infty r^2 F(r) dr.$$

$$156. \mu = -\frac{a}{c}.$$

$$157. \omega = \frac{5mc^2}{2\hbar} \left( \frac{\hbar c}{e^2} \right)^2. \text{ Если заряд размазан по поверхности}$$

шара, то угловая скорость уменьшается в  $\frac{3}{5}$  раза.

158. Перейдем в штрихованную систему координат  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$ , в которой распределение объемной плотности тока описывается функцией  $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{j}(\mathbf{a} + \mathbf{r}')$ , а магнитный момент

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}'(\mathbf{r}') dV'.$$

Сделаем замену переменных интегрирования  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ , тогда

$$\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2c} \left( \mathbf{a} \times \int \mathbf{j} dV \right).$$

Поскольку вектор  $\mathbf{a}$  произволен, второе слагаемое обращается в нуль в том случае, если

$$\int \mathbf{j} dV = 0. \quad (1)$$

Для токов в конечной области соотношение (1) получено в задаче 144.

Если токи текут в неограниченном пространстве, то несобственный интеграл (1) определим так:

$$\int_{V \rightarrow \infty} \mathbf{j} dV = \mathbf{I}. \quad (2)$$

Умножим скалярно обе части равенства (2) на произвольный постоянный вектор  $\mathbf{l} \equiv \text{grad}(\mathbf{r}\mathbf{l})$ . Под знаком интеграла воспользуемся тождеством

$$\mathbf{j} \text{ grad}(\mathbf{r}\mathbf{l}) \equiv \text{div}[(\mathbf{r}\mathbf{l}) \mathbf{j}]$$

и для некоторого фиксированного объема  $V$  преобразуем объемный интеграл в поверхностный

$$\oint_S (\mathbf{r}\mathbf{l}) j_n dS = \Pi, \quad (3)$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая фиксированный объем  $V$ . После этого перейдем к пределу  $S \rightarrow \infty$ , растягивая замкнутую поверхность во все стороны, что соответствует предельному переходу  $V \rightarrow \infty$ .

Объемная плотность тока  $\mathbf{j}$  по модулю убывает на бесконечности быстрее, чем  $1/r^4$ , так как магнитный момент имеет конечное значение. Поскольку  $S$  увеличивается пропорционально  $r^2$ , поверхностный интеграл (3) обращается в нуль при  $S \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\Pi = 0$ . Ввиду произвольности вектора  $\mathbf{l}$  интеграл (2) также равен нулю. Соотношение (1) и равенство  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}'$  доказано.

159.  $\mathcal{W} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}$ .

Указание. Воспользоваться соотношением  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} \times \mathbf{r})$ .

$$160. W = \frac{QR^2}{4c} (\omega \mathbf{H}).$$

161. Запишем момент сил в виде

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \int (\mathbf{r} \mathbf{H}) \mathbf{j} dV - \frac{\mathbf{H}}{c} \int (\mathbf{r} \mathbf{j}) dV.$$

Объемные интегралы при помощи замены (II.17) разобьем на сумму линейных интегралов по осям  $L_i$  тонких токовых трубок

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \sum_i J_i \left[ \oint_{L_i} (\mathbf{r} \mathbf{H}) d\mathbf{l}_i - \mathbf{H} \oint_{L_i} (\mathbf{r} d\mathbf{l}_i) \right]. \quad (1)$$

Ко второму интегралу применим теорему Стокса (П1.17)

$$\oint_{L_i} \mathbf{r} d\mathbf{l}_i = \int_{S_i} \text{rot } \mathbf{r} dS_i = 0,$$

а в первом — воспользуемся формулой (П1.10), тогда

$$\mathbf{N} = \frac{1}{c} \sum_i J_i \int_{S_i} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) dS_i = \frac{1}{c} \sum_i J_i (\mathbf{S}_i \times \mathbf{H}) = \sum_i \mu_i \times \mathbf{H} = \mu \times \mathbf{H}.$$

Здесь  $\mathbf{S}_i$  — вектор площади поверхности, натянутой на контур  $i$ -й токовой трубки

$$\mathbf{S}_i = \int_{S_i} d\mathbf{S}_i,$$

а  $\mu_i$  — магнитный момент линейного тока  $J_i$ .

$$162. \mathbf{N} = \frac{\pi}{c} h R^3 \sigma (\omega \times \mathbf{H}).$$

163. Введем обозначение  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') \equiv \mathbf{j}'(\mathbf{r}')$ , где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор фиксированной внутренней точки рассматриваемой области пространства, и перейдем к интегрированию по штрихованным координатам

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}'(\mathbf{r}') \times \mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') dV'.$$

Затем воспользуемся разложением в ряд Тейлора

$$\mathbf{H}(\mathbf{R} + \mathbf{r}') = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H}(\mathbf{R}) + \dots,$$

где оператор  $\nabla$  действует на координаты фиксированной точки с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ . В первом отличном от нуля приближении имеем

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}'(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' \nabla) \mathbf{H} dV',$$

где  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$ . Далее применим формулы

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}'\nabla) \mathbf{H} &= \text{grad}(\mathbf{r}'\mathbf{H}), \\ \text{rot}[(\mathbf{r}'\mathbf{H}) \mathbf{j}'] &= \text{grad}(\mathbf{r}'\mathbf{H}) \times \mathbf{j}',\end{aligned}$$

в которых дифференцирование производится по компонентам радиус-вектора  $\mathbf{R}$ . Тогда выражение для искомой силы преобразуется к более удобному виду

$$\mathbf{F} = -\text{rot} \left[ \frac{1}{c} \int (\mathbf{r}'\mathbf{H}) \mathbf{j}'(\mathbf{r}') dV' \right].$$

Полученный здесь интеграл вычислен ранее при решении задачи 161. Он равен векторному произведению магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  тока и вектора  $\mathbf{H}$ . Окончательно находим

$$\mathbf{F} = -\text{rot}(\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}) = \text{grad}(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}),$$

где производные берутся от векторной функции  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{R})$  по координатам фиксированной точки с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ , которая лежит внутри токовой области.

### § 3. Магнитное поле на больших расстояниях от тока

164.  $\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$ ,  $\mathbf{H} = \frac{3(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}$ , где  $\boldsymbol{\mu}$  — магнитный момент вращающегося эллипсоида:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{Qa^2\boldsymbol{\omega}}{5c}.$$

165.  $\mathbf{A} = \frac{Qh^2}{4cr^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H} = \frac{Qh^2}{4cr^5} [3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\boldsymbol{\omega}]$ .

166.  $\mathbf{H} = \frac{\sqrt{3}a^2J}{4cr^5} [3(\mathbf{n}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{n}]$ . Единичный вектор  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости треугольника образует с направлением тока  $J$  праввинтовую систему.

167.  $W = \left( \frac{QR^2}{3c} \right)^2 \left( \frac{3(\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2}{r^3} \right)$ . Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  проведен из центра первого шара к центру второго.

168.  $\mathbf{F} = \frac{9Qh^2}{20c} \left( \frac{(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})\boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{5(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^7} \right)$ .

### § 4. Закон Био и Савара

170. Применим формулу (II.16), поместив начало координат в центр шара и направив ось  $Z$  вдоль вектора  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда напряженность магнитного поля в центре шара запишется:

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})}{r^3} dV,$$

где штрих у переменной интегрирования опущен. В результате вращения внутри шара появится ток с объемной плотностью  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , где  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ . Раскрывая двойное векторное произведение в подынтегральном выражении, получаем

$$\mathbf{H}(0) = \frac{1}{c} \int \rho \frac{r^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} z \mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Интегралы, содержащие  $zx$  и  $zy$ , обращаются в нуль как интегралы от нечетной функции в симметричных пределах. Оставшиеся слагаемые дают

$$\mathbf{H}(0) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{c} \int \frac{\rho \sin^2 \theta}{r} dV.$$

Полученная формула справедлива для любого тела вращения, внутри которого распределен заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho(r, \theta)$ . В частности, для равномерно заряженного шара находим

$$\mathbf{H}(0) = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{cR}.$$

Если заряд  $Q$  размазан по поверхности, то напряженность магнитного поля в центре шара уменьшается в  $2/3$  раза.

$$171. \mathbf{H} = \frac{\pi}{c} h \sigma \boldsymbol{\omega}.$$

$$172. H_x = H_y = 0, H_z = \frac{2e\hbar}{405mc a^3}.$$

$$173. \Delta H = -\frac{e^2 H_0}{3amc^2}.$$

174.  $\mathbf{H} = \frac{Q(\omega_1 - \omega_2)\boldsymbol{\omega}_1}{2c\omega_1 R}$ . Напряженность магнитного поля в центре обращается в нуль, если заряды первой и второй половин шара  $Q_1 = \omega_2 Q/(\omega_1 + \omega_2)$ ,  $Q_2 = \omega_1 Q/(\omega_1 + \omega_2)$ .

$$175. \mathbf{H} = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{c(b^2 - a^2)} \left( b - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) (a > b);$$

$$\mathbf{H} = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{c(b^2 - a^2)} \left( b - \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right) (b > a).$$

$$176. \mathbf{H} = \frac{Q\boldsymbol{\omega}}{cR} \left( 1 - \cos \theta_0 \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \right).$$

$$177. W = \frac{3(3\sqrt{2} - 4)Q\mu\boldsymbol{\omega}}{3hc}.$$

$$178. W = \frac{e\hbar\mu}{24mca^3}.$$

$$179. \mathbf{H} = \frac{8\mu_0}{3a^3}, W = \frac{8\mu\mu_0}{3a^3}.$$

180.

$$\mathbf{N} = \frac{3Q}{2c} \left( \frac{b}{b^2 - a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)^3}} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a} \right) (\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\omega}).$$

$$181. \mathbf{H} = 2\pi\sigma |z| \left[ \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2 \right] \frac{\boldsymbol{\omega}}{c};$$

$$\mathbf{H} = \frac{\pi\sigma R^4 \boldsymbol{\omega}}{2c |z|^3} \text{ при } |z| \gg R; \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\pi\sigma R^4 \boldsymbol{\omega}}{4c}.$$

$$182. \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{a}}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - \frac{3\mathbf{a}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Вектор  $\mathbf{a}$  пропорционален магнитному моменту  $\boldsymbol{\mu}$  заданного тока согласно формуле  $\mathbf{a} = -c\boldsymbol{\mu}$ .

183. Векторный потенциал, созданный магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}') dV'$  элемента объема  $dV'$ , имеет вид

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV',$$

где  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}') = \mu_0 F(\mathbf{r}')$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , а  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы точки наблюдения и точки нахождения элемента объема  $dV'$ . Для произвольного объема  $V$  по принципу суперпозиции получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV' = \int_V \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}') \times \text{grad}' \frac{1}{R} dV'.$$

При помощи формул (Пл.30) и (Пл.18) преобразуем последний интеграл к виду

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{c \text{rot}' \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')}{R} dV' - \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}')}{R} dS'.$$

Устремим объем  $V$  к бесконечности, неограниченно расширяя его во все стороны. При этом поверхностный интеграл обращается в нуль, так как подынтегральное выражение при  $S \rightarrow \infty$  убывает быстрее, чем  $1/r'^2$ . Сравнивая полученный результат с общей формулой

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

приходим к выводу, что распределенный магнитный момент создает такое же магнитное поле, как и ток с объемной плотностью

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = c \text{rot}(\mu_0 F(\mathbf{r})).$$

184. Начало координат поместим в вершину прямого угла, а ось  $Z$  выберем по направлению тока. Тогда получим

$$\text{а) } \mathbf{H} = \frac{J}{cx} \mathbf{l}_y; \quad \text{б) } \mathbf{H} = \frac{J}{cy} (\mathbf{l}_z - \mathbf{l}_x).$$



185.  $\mathbf{H} = -\frac{2J}{cr}(1 + \sqrt{2})\mathbf{i}_y$ , где обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

186.  $\mathbf{H} = \frac{2J}{\sqrt{3}ca}\mathbf{n}$ , где орт  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости треугольника образует правовинтовую систему с направлением тока  $J$ .

187.  $\mathbf{H} = \frac{8a^2J\mathbf{n}}{b(z^2 + a^2)\sqrt{z^2 + 2a^2}}$ , где орт  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости квадрата образует с направлением тока  $J$  правовинтовую систему.

188.  $\mathbf{H} = \frac{\pi J}{cR}\mathbf{n}$ , где орт  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости полуокружности образует правовинтовую систему с направлением тока, текущего по дуге.

189.  $\mathbf{H} = \frac{2\pi R^2 J \mathbf{n}}{c(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2\mu}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$ , где орт  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости кольца образует с направлением тока  $J$  правовинтовую систему.

## § 5. Теорема о циркуляции напряженности магнитного поля

190. Распределение тока обладает цилиндрической симметрией, поэтому проще всего воспользоваться теоремой о циркуляции напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля (II.8). Вследствие цилиндрической симметрии вектор  $\mathbf{H}$  в каждой точке пространства перпендикулярен оси цилиндра и направлен по касательной к окружности с центром на его оси. Направления векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{j}$  связаны между собой, как в законе Био и Савара. По модулю вектор  $\mathbf{H}$  зависит только от расстояния до оси цилиндра. Сделанные утверждения однозначно определяют форму вспомогательного контура интегрирования в формуле (II.8).

Чтобы найти напряженность  $\mathbf{H}_1$  магнитного поля внутри цилиндра в фиксированной точке на расстоянии  $r$  от его оси, проведем через эту точку окружность  $C_r$  радиуса  $r$  с центром на указанной оси и вычислим циркуляцию вектора  $\mathbf{H}_1$ :

$$\oint_{C_r} \mathbf{H}_1 d\mathbf{l} = H_1 \oint_{C_r} d\mathbf{l} = 2\pi r H_1.$$

Ток, охватываемый вспомогательной окружностью  $C_r$ ,

$$\int \mathbf{j} d\mathbf{S} = \pi r^2 \mathbf{j}.$$

После проделанных вычислений соотношение (II.8) превращается в алгебраическое уравнение относительно  $H_1$ , откуда находим

$$H_{1\psi} = H_1 = \frac{2\pi jr}{c}, \quad H_{1r} = H_{1z} = 0.$$

Напряженность  $H_2$  магнитного поля снаружи цилиндра вычисляется аналогично:

$$H_{2\psi} = \frac{2\pi R^2 j}{cr}, \quad H_{2r} = H_{2z} = 0.$$

Из аксиальной симметрии следует  $A_r = A_\psi = 0$ ,  $A_z = A_z(r)$ . Поэтому соотношение  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  внутри и снаружи цилиндра принимает вид

$$\frac{dA_{1z}}{dr} = -\frac{2\pi j}{c} r \quad (r \leq R),$$

$$\frac{dA_{2z}}{dr} = -\frac{2\pi R^2 j}{cr} \quad (r \geq R).$$

Интегрирование этих уравнений с учетом дополнительных условий  $A_{1z}(R) = A_{2z}(R) = 0$  дает

$$A_{1z} = \frac{\pi j}{c} (R^2 - r^2), \quad A_{2z} = \frac{2\pi R^2 j}{c} \ln \frac{R}{r}.$$

191. При  $r \leq R$ :

$$H_{1r} = H_{1z} = 0, \quad H_{1\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^r j(\eta) \eta d\eta,$$

$$A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{4\pi}{c} \int_r^R \frac{1}{\xi} \int_0^\xi j(\eta) \eta d\eta;$$

при  $r \geq R$ :

$$H_{2r} = H_{2z} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi}{cr} \int_0^R j(\eta) \eta d\eta,$$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \int_0^R j(\eta) \eta d\eta \ln \frac{R}{r}.$$

192. По абсолютной величине искомая сила определяется формулой

$$F = \frac{4J^2}{3\pi c^2 R}.$$

193.  $H_1 = 0$  при  $r < R$ ;  $H_{2r} = H_{2z} = 0$ ,  $H_{2\psi} = \frac{4\pi Ri_0}{cr}$  при  $r > R$ .

194.  $H_x = H_z = 0$ ,  $H_y = -\frac{2\pi i_0 z}{c|z|}$ .

$$195. \mathbf{H}_1 = 0 \text{ при } r \leq R_1; H_{2r} = H_{2z} = 0, H_{2\phi} = \frac{2\pi j(r^2 - R_1^2)}{cr}$$

при  $R_1 \leq r \leq R_2$ ;  $H_{3r} = H_{3z} = 0, H_{3\phi} = \frac{2\pi j(R_2^2 - R_1^2)}{cr}$  при  $r \geq R_2$ .

$$196. \mathbf{H}_1 = \frac{4\pi jz}{c} \mathbf{1}_x \text{ при } |z| \leq l,$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{4\pi jlz}{c|z|} \mathbf{1}_x \text{ при } |z| \geq l.$$

$$197. H_x = \frac{2J}{c} \left( \frac{y}{(x+l)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-l)^2 + y^2} \right),$$

$$H_y = \frac{2J}{c} \left( \frac{x-l}{(x-l)^2 + y^2} - \frac{x+l}{(x+l)^2 + y^2} \right),$$

$$H_z = 0;$$

$$\mathbf{H} = \frac{4Jl}{cr^2} \left[ \left( \frac{2xy}{r^2} - 1 \right) \mathbf{1}_y - \frac{2xy}{r^2} \mathbf{1}_x \right] \text{ при } r \gg L$$

$$198. r = \frac{a}{\exp\left(\frac{c\Phi_0}{2aJ}\right) - 1}.$$

199. Рамка притягивается к прямолинейному току с силой

$$F = \frac{2a^2 J_1 J_2}{c^2 r(r+a)}.$$

200. Для антипараллельных токов:

$$\mathbf{H}_1 = 0 \text{ при } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = -\frac{4\pi i_0}{c} \mathbf{1}_x \text{ при } |z| < l;$$

для параллельных токов:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{4\pi i_0 z}{c|z|} \mathbf{1}_x \text{ при } |z| > l,$$

$$\mathbf{H}_2 = 0 \text{ при } |z| < l.$$

$$201. \mathbf{H} = 0 \text{ при } z > 0, H_r = H_z = 0 \text{ и } H_\phi = \frac{2J}{cr} \text{ при } z < 0;$$

$$H_{1r} = H_{1z} = 0, H_{1\phi} = \frac{J}{cr} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right); H_{2r} = H_{2z} = 0, H_{2\phi} =$$

$$= \mp \frac{J}{cr} \left( 1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right), \text{ где верхний знак берется для } z > 0,$$

а нижний — при  $z < 0$ . Здесь  $r$  и  $z$  — цилиндрические координаты точки наблюдения.

$$202. \mathbf{H} = 0 \text{ внутри сферы; } H_r = H_z = 0 \text{ и } H_\phi = \frac{2J}{cr} \text{ снаружи}$$

сферы, где  $r$  — расстояние до оси  $z$ .

203. Циркуляция напряженности магнитного поля запишется так:

$$\oint \mathbf{H}(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = -\frac{I}{c} \oint_L \oint_{L'} \left( d\mathbf{l}' \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) d\mathbf{l}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ . Сделаем циклическую перестановку сомножителей в смешанном произведении и рассмотрим интеграл по штрихованной переменной. Для этого натянем на токовый контур  $L'$  фиксированную поверхность  $S'$ , которая превращает окружающее пространство в односвязную область и рассекает замкнутый контур  $L$  в некоторой точке. К интегралу по штрихованной переменной применим теорему Стокса (Пл.17):

$$\begin{aligned} -\oint_{L'} \oint_L \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l} \right) d\mathbf{l}' &= -\int_{S'} \text{rot}' \int_1^2 \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l} \right) dS' = \\ &= \int_{S'} \int_1^2 \text{rot} \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} \times d\mathbf{l} \right) dS' = \int_{S'} \int_1^2 \left[ (d\mathbf{l} \nabla) \frac{\mathbf{R}}{R^3} - d\mathbf{l} \text{div} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] dS', \end{aligned}$$

где цифрами 1 и 2 обозначены начало и конец рассеченного контура  $L$ , которые лежат по разные стороны поверхности  $S'$ , прикасаясь к ней в одной и той же точке. Интеграл от второго слагаемого обращается в нуль, так как

$$\text{div} \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \text{div} \text{grad} \frac{1}{R} = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

а при интегрировании  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ .

Величина  $\frac{\mathbf{R} dS'}{R^3} \equiv d\Omega$  представляет собой телесный угол, под которым видна площадка  $dS'$  из точки, лежащей на контуре  $L$ . Следовательно, интеграл по штрихованной переменной равен телесному углу  $\Omega = \Omega(\mathbf{r})$ , под которым из точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  видна поверхность  $S'$ , натянутая на контур  $L'$ . Величина  $\Omega(\mathbf{r})$  положительна, если нормаль  $\mathbf{n}'$  к поверхности  $S'$  направлена от точки наблюдения, и отрицательна в противном случае. Значение телесного угла  $\Omega(\mathbf{r})$  в точках 1 и 2 обозначим через  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Интеграл вдоль рассеченного контура  $L$  от точки 1 до точки 2 легко вычисляется:

$$\int_1^2 (d\mathbf{l} \nabla) \Omega = \int_1^2 \boldsymbol{\tau} \text{grad} \Omega d\mathbf{l} = \int_1^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\tau}} d\mathbf{l} = \Omega_2 - \Omega_1.$$

Для определенности считаем, что в точке пересечения контура  $L$  поверхностью  $S'$  векторы  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}'$  образуют острый угол. Тогда скачок  $\Omega_2 - \Omega_1$  телесного угла  $\Omega(\mathbf{r})$  при переходе через поверхность  $S'$

равен  $4\pi$ . Таким образом, интеграл в правой части равенства (1) равен  $\frac{4\pi}{c} J$ .

204. Внутреннюю полость цилиндрической поверхности радиуса  $R$  однородно заполним током с объемной плотностью  $\mathbf{j}$  и антипараллельным током с объемной плотностью  $-\mathbf{j}$ . Эта операция не изменит магнитное поле исходной системы, хотя и заменит ее двумя сплошными цилиндрами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с антипараллельными токами. По принципу суперпозиции напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля внутри цилиндра радиуса  $R_1$  равна сумме напряженностей  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$ , созданных наружным и внутренним цилиндрами в отдельности, где

$$\mathbf{H}_+ = \frac{2\pi}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_- = \frac{2\pi}{c} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}).$$

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  — радиус-векторы, лежащие в перпендикулярной к цилиндрам плоскости и проведенные от осей указанных цилиндров в точку наблюдения. Напряженность суммарного магнитного поля однородна и равна

$$\mathbf{H} = \frac{2\pi}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{l}),$$

где  $\mathbf{l}$  — вектор, проведенный от оси наружного цилиндра к оси внутреннего  $\mathbf{l} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Его модуль равен расстоянию между этими осями. Найденное магнитное поле существует также внутри цилиндрической полости радиуса  $R_1$  до заполнения ее антипараллельными токами.

205.  $\mathbf{H} = \frac{2a}{cr^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_y) - \frac{2\pi i_0 y}{c |y|} \mathbf{i}_x$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, лежащий в плоскости  $XY$ .

206. Цилиндры отталкиваются с силой, отнесенной к единице их длины, которая по абсолютной величине равна

$$F = 2 \left( \frac{\pi R_1}{c} \right)^2 l_{j_1 j_2}.$$

$$207. \quad W = \left( \frac{\pi R_1}{c} \right)^2 j_1 j_2 (l^2 + R_1^2 - R_2^2).$$

## § 6. Уравнение Лапласа и Пуассона с дополнительными условиями

$$208. \quad j_r = j_\theta = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{2\pi} r \sin \theta & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

$$209. \quad j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \frac{ac}{\pi} r & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

210. На сфере радиуса  $R$  течет поверхностный ток с плотность

$$i_r = i_\theta = 0, \quad i_\psi = \frac{3ac}{4\pi} \sin \theta.$$

211. Функция  $f(r)$  должна удовлетворять уравнению Лапласа.

212. Искомый векторный потенциал представляет собой частное решение уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0 \cos kr, \quad (1)$$

которое обращается в нуль при  $\mathbf{j}_0 = 0$ . Поскольку граничное условие отсутствует, а правая часть уравнения (1) периодична в неограниченном пространстве, векторный потенциал имеет ту же периодическую структуру

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \cos kr. \quad (2)$$

Чтобы найти постоянный вектор  $\mathbf{A}_0$ , искомое решение (2) подставляем в уравнение (1) и сокращаем на общий множитель  $\cos kr$ . В результате получаем

$$\mathbf{A} = \frac{4\pi \mathbf{j}_0}{k^2 c} \cos kr.$$

Напряженность магнитного поля находится по формуле (II.9):

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{k})}{k^2 c} \sin kr.$$

213.

$$\mathbf{A}_2 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} e^{-\lambda z} \left[ \cos(k_1 x + k_2 y) + \frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1 x + k_2 y) \right] \quad (z \geq 0),$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{2\pi \mathbf{j}_0}{ck^2} \left\{ 2 \cos kr + e^{\lambda z} \left[ \frac{k_3}{\lambda} \sin(k_1 x + k_2 y) - \cos(k_1 x + k_2 y) \right] \right\} \quad (z \leq 0).$$

У к а з а н и е. Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  имеет постоянное направление, определяемое вектором  $\mathbf{j}_0$ . Модуль векторного потенциала удовлетворяет уравнению и дополнительным условиям таким же, как и потенциал электрического поля в задаче 53. Это позволяет воспользоваться методикой, изложенной при решении указанной задачи.

$$214. \mathbf{A} = \frac{2\pi \mathbf{l}_0}{cl} e^{-l|z|} \cos l r.$$

215.

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi}{c} \left( \frac{\mathbf{a}_1}{l_1} e^{-l_1|z|} \cos l_1 r + \frac{\mathbf{a}_2}{l_2} e^{-l_2|y|} \cos l_2 r + \frac{\mathbf{a}_3}{l_3} e^{-l_3|x|} \cos l_3 r \right).$$

216.

$$\mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_0 [l_2 \sin l_1 a - e^{-l_2 a} (l_2 \sin l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 a] \times \\ \times e^{l_2(x+a)} \sin l_2 y \quad (x \leq -a),$$

$$A_2 = A_0 [l_2 \sin l_1 x - e^{-l_2 a} (l_2 \sin l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 x] \sin l_2 y \quad (|x| \leq a).$$

$$A_3 = A_0 [l_2 \sin l_1 a - e^{-l_2 a} (l_2 \sin l_1 a + l_1 \cos l_1 a) \operatorname{sh} l_2 a] \times \\ \times e^{-l_2 (x-a)} \sin l_2 y \quad (x \geq a),$$

где введено обозначение

$$A_0 = \frac{4\pi j_0}{cl_2(l_1^2 + l_2^2)}.$$

У к а з а н и е. Использовать метод решения задачи 54.

217. Из условий задачи следует  $A_r = A_\psi = 0$  и  $A_z = A(r, \psi)$ .  
Функция

$$A(r, \psi) = \begin{cases} A_1(r, \psi) & \text{при } r \leq R, \\ A_2(r, \psi) & \text{при } r \geq R \end{cases}$$

внутри и снаружи цилиндра удовлетворяет уравнениям

$$\nabla^2 A_1 = -\frac{4\pi}{c} j_0 r^s \cos n\psi, \quad \nabla^2 A_2 = 0 \quad (1)$$

и граничным условиям на поверхности

$$A_1(R, \psi) = A_2(R, \psi), \quad \frac{\partial A_1(R, \psi)}{\partial r} = \frac{\partial A_2(R, \psi)}{\partial r}.$$

Кроме того, функция  $A_1(r, \psi)$  непрерывна в точке  $r = 0$ , а векторный потенциал снаружи цилиндра возрастает не быстрее, чем  $\ln r$ . Последнее утверждение обусловлено тем, что полный ток, текущий через поперечное сечение цилиндра, равен нулю (согласно результатам задачи 190 векторный потенциал бесконечного прямолинейного тока на больших расстояниях возрастает, как  $\ln r$ ). Уравнения и дополнительные условия позволяют применить метод разделения переменных. Поскольку  $\cos n\psi$  при действии угловой части оператора Лапласа в цилиндрических координатах (Пл.40) воспроизводится  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \cos n\psi = -\frac{n^2}{r^2} \cos n\psi$  и, кроме того, функция  $\cos n\psi$  является однозначной на оси  $X$  при  $\psi \rightarrow 0$  и  $\psi \rightarrow 2\pi$ , будем искать решение в виде

$$A_1 = F_1(r) \cos n\psi, \quad A_2 = F_2(r) \cos n\psi,$$

где  $F_1(r)$  непрерывна, а функция  $F_2(r)$  вдали от цилиндра возрастает не быстрее, чем  $\ln r$ . После подстановки в уравнения (1) и сокращения на общий множитель получим

$$r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + r \frac{dF_1}{dr} - n^2 F_1 = -\frac{4\pi}{c} j_0 r^{s+2}, \quad (2)$$

$$r^2 \frac{d^2 F_2}{dr^2} + r \frac{dF_2}{dr} - n^2 F_2 = 0. \quad (3)$$

Дополнительными условиями к уравнениям (2) и (3) служат

$$F_1(R) = F_2(R), \quad \frac{\partial F_1(R)}{\partial r} = \frac{\partial F_2(R)}{\partial r}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (2) имеет вид

$$F_{1 \text{ част}} = \frac{4\pi j_0 r^{s+2}}{c [n^2 - (s+2)^2]},$$

а решение соответствующих однородных уравнений ищем в виде  $Cr^v$  где постоянные  $C$  и  $v$  определяются из самих уравнений и дополнительных условий. Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательный ответ:

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn} \frac{R^{s+2}}{n-s-2} \left[ \frac{2n}{n+s+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{s+2} - \left(\frac{r}{R}\right)^n \right] \cos n\psi \quad (r \leq R),$$

$$A_r = A_\psi = 0,$$

$$A_z = \frac{2\pi j_0}{cn} \frac{R^{s+2}}{n+s+2} \left(\frac{R}{r}\right)^n \cos n\psi \quad (r \geq R).$$

218.

$$A_1 = \frac{\pi R^2 j_0}{c} \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right] \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi \quad (r \leq R),$$

$$A_2 = \frac{\pi R^2 j_0}{c} \left[ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \right] \left(\frac{R}{r}\right)^{n-2} \cos n\psi \quad (r \geq R).$$

219. Вращающийся цилиндр создает в пространстве ток с объемной плотностью

$$j_r = j_z = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \rho \omega r & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Поэтому необходимо использовать лапласиан в цилиндрических координатах (П1.42).

Из симметрии задачи следует  $A_r = A_z = 0$  и  $A_\psi = A(r)$ . Функция

$$A(r) = \begin{cases} A_1(r) & \text{при } r \leq R, \\ A_2(r) & \text{при } r > R \end{cases}$$

внутри и снаружи цилиндра удовлетворяет уравнениям

$$r^2 \frac{d^2 A_1}{dr^2} + r \frac{dA_1}{dr} - A_1 = -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r^3, \quad (1)$$

$$r^2 \frac{d^2 A_2}{dr^2} + r \frac{dA_2}{dr} - A_2 = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$A_1(R) = A_2(R), \quad \frac{dA_1(R)}{dr} = \frac{dA_2(R)}{dr}.$$



Векторный потенциал непрерывен в любой конечной области пространства, а вдали от цилиндра не возрастает. Последнее утверждение связано с тем, что вращающийся цилиндр можно рассматривать, как совокупность кольцевых токов. Следовательно, векторный потенциал отдельного участка цилиндра убывает на бесконечности, как  $1/r^2$ . Полный векторный потенциал равен бесконечной сумме вкладов от отдельных участков цилиндра. Такое суммирование (точнее говоря, интегрирование) увеличивает значение векторного потенциала вдали от цилиндра и приводит к более слабому закону убывания  $A_2 \sim 1/r$ .

Метод решения уравнения Эйлера (1) и (2) изложен в задаче 55. Окончательно получаем

$$\text{при } r \leq R: \\ A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{\pi}{3} \rho \omega r \left( R^2 - \frac{r^2}{2} \right), \quad H_1 = \frac{2\pi}{c} \rho (R^2 - r^2) \omega; \\ \text{при } r \geq R:$$

$$A_{2r} = A_{2z} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{\pi \rho \omega R^4}{2cr}, \quad H_2 = 0.$$

$$220. \quad A_{1r} = A_{1\psi} = 0, \quad A_{1z} = \frac{4\pi}{c} \int_r^R \frac{1}{\xi} \int_0^\xi j(\eta) \eta d\eta d\xi \quad (r \leq R),$$

$$A_{2r} = A_{2\psi} = 0, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \int_0^R j(\eta) \eta d\eta \ln \frac{R}{r} \quad (r \geq R).$$

221. В сферических координатах распределение объемной плотности тока описывается функцией

$$j_r = j_\theta = 0, \quad j_\psi = \begin{cases} \rho \omega r \sin \theta & \text{при } r \leq R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Из общего решения (II.15) уравнения Пуассона и симметрии системы вытекает  $A_r = A_\theta = 0$  и  $A_\psi = A(r, \theta)$ . Векторный потенциал внутри и снаружи шара обозначим через  $A_1$  и  $A_2$ . Имея в виду лапласиан (III.48) в сферических координатах, находим

$$\nabla^2 A_1 - \frac{A_1}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r \sin \theta, \quad (1)$$

$$\nabla^2 A_2 - \frac{A_2}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (2)$$

Функции  $A_1$  и  $A_2$  ограничены в любой конечной точке пространства, а последняя вдали от шара убывает не медленнее, чем  $1/r^2$ . На поверхности шара выполняются граничные условия

$$A_1(R, \theta) = A_2(R, \theta), \quad \frac{\partial A_1(R, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial A_2(R, \theta)}{\partial r}.$$

Сформулированная задача решается методом разделения переменных. При этом учтем, что на больших расстояниях от шара функция  $A_2(r, \theta)$  совпадает с векторным потенциалом магнитного момента  $\mu$  вращающегося шара:

$$A_2(r, \theta) = \frac{\mu \sin \theta}{r^2} \quad \left( \mu = \frac{4\pi \rho R^5}{15c} \omega \right).$$

Поэтому естественно попытаться найти решение уравнений (1) и (2) в виде

$$A_1 = F_1(r) \sin \theta, \quad A_2 = F_2(r) \sin \theta.$$

Подставляя искомые решения в (1) и (2) и сокращая на общий множитель, приходим к уравнениям Эйлера

$$r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + 2r \frac{dF_1}{dr} - 2F_1 = -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r^3,$$

$$r^2 \frac{d^2 F_2}{dr^2} + 2r \frac{dF_2}{dr} - 2F_2 = 0,$$

решение которых описано в предыдущих задачах (см., например, задачу 55). Приводим окончательный результат:

$$\begin{aligned} A_{1r} &= A_{1\theta} = 0, & A_{1\psi} &= \frac{2\pi}{c} \rho \omega r \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin \theta, \\ H_{1r} &= \frac{4\pi}{c} \rho \omega \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos \theta, & H_{1\theta} &= \frac{4\pi}{c} \rho \omega \left( \frac{2}{5} r^2 - \frac{R^2}{3} \right) \sin \theta, \\ & & H_{1\psi} &= 0 \quad (r \leq R); \\ A_2 &= \frac{\mu \times r}{r^3}, & H_2 &= \frac{3(\mu r)}{r^5} - \frac{\mu}{r^3} \quad (r \geq R). \end{aligned}$$

**222.** Одна половина шара прижимается к другой с силой

$$F = \frac{1}{15} \left( \frac{\pi \rho \omega R^3}{c} \right)^2.$$

**223.** При  $r < R$ :

$$\begin{aligned} A_{1r} &= A_{1\psi} = 0, & A_{1z} &= \frac{2\pi R i_0}{cn} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n\psi, \\ H_{1r} &= -\frac{2\pi i_0}{c} \left( \frac{r}{R} \right)^{n-1} \sin n\psi, & H_{1\psi} &= -\frac{2\pi i_0}{c} \left( \frac{r}{R} \right)^{n-1} \cos n\psi, \\ & & H_{1z} &= 0; \end{aligned}$$

при  $r > R$ :

$$\begin{aligned} A_{2r} &= A_{2\psi} = 0, & A_{2z} &= \frac{2\pi R i_0}{cn} \left( \frac{R}{r} \right)^n \cos n\psi, \\ H_{2r} &= -\frac{2\pi i_0}{c} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sin n\psi, & H_{2\psi} &= \frac{2\pi i_0}{c} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \cos n\psi, \\ & & H_{2z} &= 0. \end{aligned}$$

224.  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{H}_1 = 0 \quad \text{при } r < R;$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{4\pi R i_0}{c} \ln \frac{R}{r} + \mathbf{A}_0, \quad H_{2r} = H_{2z} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi R i_0}{cr} \quad \text{при } r > R.$$

Здесь  $\mathbf{A}_0$  — произвольный постоянный вектор, имеющий размерность потенциала.

225. При  $r < R$ :

$$A_{1r} = A_{1z} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{2\pi}{c} \sigma \omega R r,$$

$$H_{1r} = H_{1\psi} = 0, \quad H_{1z} = \frac{4\pi}{c} \sigma \omega R;$$

при  $r > R$ :

$$A_{2r} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{2\pi \sigma \omega R^3}{cr}, \quad A_{2z} = \frac{4\pi}{c} \sigma v R \ln \frac{R}{r},$$

$$H_{2r} = 0, \quad H_{2\psi} = \frac{4\pi \sigma v R}{cr}, \quad H_{2z} = 0,$$

где ось  $Z$  выбрана вдоль направления движения, а произвольное постоянное слагаемое в векторном потенциале опущено.

226. При  $r < R$ :

$$A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{4\pi}{3c} \sigma \omega R r \sin \theta,$$

$$H_{1r} = \frac{8\pi}{3c} \sigma \omega R \cos \theta, \quad H_{1\theta} = -\frac{8\pi}{3c} \sigma \omega R \sin \theta, \quad H_{1\psi} = 0;$$

при  $r > R$ :

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{4\pi \sigma \omega R^4}{3cr^2} \sin \theta,$$

$$H_{2r} = \frac{8\pi \sigma \omega R^4}{3cr^3} \cos \theta, \quad H_{2\theta} = \frac{4\pi \sigma \omega R^4}{3cr^3} \sin \theta, \quad H_{2\psi} = 0.$$

Магнитный момент вращающейся сферы

$$\mu = \frac{4\pi}{3c} \sigma R^4 \omega.$$

Векторный потенциал и напряженность магнитного поля выражаются через магнитный момент следующим образом:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu \times \mathbf{r}}{R^3}, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{2\mu}{R^3} \quad (r < R),$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{3(\mu \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mu}{r^3} \quad (r > R).$$

227. Векторный потенциал направлен по оси  $Z$  и однороден вдоль этого направления  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, \psi)$ .

Ток на поверхности цилиндра удобно разбить на сумму двух слагаемых  $i_a + i_b$ , где

$$i_a = \frac{1}{2} (i_1 + i_2),$$

$$i_b = \begin{cases} \frac{1}{2} (i_1 - i_2) & \text{при } 0 < \psi < \pi, \\ \frac{1}{2} (i_2 - i_1) & \text{при } \pi < \psi < 2\pi. \end{cases}$$

Этим токам отвечает сумма векторных потенциалов  $A_a + A_b$ . Величина  $A_a$  найдена в задаче 224:

$$A_a = \begin{cases} A_0 & \text{при } r \leq R, \\ \frac{2\pi R}{c} (i_1 + i_2) \ln \frac{R}{r} + A_0 & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где  $A_0$  — произвольный постоянный вектор с размерностью потенциала.

Векторный потенциал

$$A_b(r, \psi) = \begin{cases} A_{1b}(r, \psi) & (r \leq R), \\ A_{2b}(r, \psi) & (r \geq R) \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному условию на цилиндрической поверхности

$$A_{1b}(R, \psi) = A_{2b}(R, \psi), \quad \frac{\partial A_{1b}(R, \psi)}{\partial r} - \frac{\partial A_{2b}(R, \psi)}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} i_b.$$

Кроме того, функция  $A_{1b}$  ограничена в точках оси  $Z$ , а величина  $A_{2b}$  обращается в нуль на бесконечности:  $A_{2b}(\infty, \psi) = 0$ . Последнее утверждение обусловлено тем, что цилиндрическая поверхность с током  $i_b$  на больших расстояниях  $r \gg R$  эквивалентна системе двух прямолинейных нитей с антипараллельными токами, векторный потенциал которых при  $r \rightarrow \infty$  обращается в нуль. В действительности, для однозначного решения задачи достаточно более слабого требования, чтобы функция  $A_{2b}(r, \psi)$  не возрастала при  $r \rightarrow \infty$ . Дальнейшие вычисления аналогичны решению задачи 72, так что окончательно получаем

$$A = \frac{4R(i_1 + i_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \leq R),$$

$$A = \frac{2\pi R(i_1 + i_2)}{c} \ln \frac{R}{r} + \frac{4R(i_1 - i_2)}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\psi}{(2k+1)^2} \quad (r \geq R).$$

$$228. \quad A_{1r} = A_{1\theta} = 0, \quad A_{1\psi} = \frac{b}{2} \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin \theta \quad (r \leq R);$$

$$A_{2r} = A_{2\theta} = 0, \quad A_{2\psi} = \frac{bR^5}{15r^2} \sin \theta \quad (r \geq R).$$

$$229. \quad W = \frac{\mu^2}{R^3}; \quad \mu = \frac{QR^2}{3c} \omega.$$

$$230. \quad W = \frac{10\mu^2}{7R^3}; \quad \mu = \frac{QR^2}{5c} \omega.$$

$$231. \quad W = \frac{8\mu^2}{3R^2}; \quad \mu = \frac{\pi\rho R^4}{4c} \omega.$$

$$232. \quad W = \frac{2\mu^2}{R^2}; \quad \mu = \frac{\pi\sigma R^3}{c} \omega.$$

$$233. \quad W = \frac{1}{n} \left( \frac{\pi R i_0}{c} \right)^2.$$

$$234. \quad W = 16 \left( \frac{Ri}{c} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}.$$

235.  $A_r = A_\psi = 0$ ,  $A_z = \frac{2J(rl)}{cr^2}$ . Ось  $Z$  совпадает с осью одного из цилиндров и направлена противоположно течению тока в нем. Радиус-вектор  $\mathbf{r}$  лежит в плоскости  $XY$ , а вектор  $\mathbf{l}$  проведен в той же плоскости из начала координат к оси другого цилиндра. Напряженность магнитного поля на больших расстояниях  $r \gg l$  от цилиндров убывает достаточно быстро:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J(lr)}{cr^3},$$

так что энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины данной системы, имеет конечное значение.

## Глава III

# ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 1. Уравнения Максвелла

236. Нет.

237. Нет.

238. Нет.

239. Да.

240. Если к вектору  $\mathbf{s}$  прибавить  $\text{rot } \mathbf{F}$ , где векторная функция  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  произвольна, то соотношение

$$\text{div } \mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}) \quad (1)$$

не изменится в соответствии с теоремой векторного анализа

$$\text{div rot } \mathbf{F} = 0.$$

Следовательно, дивергенция суммы  $\mathbf{s} + \text{rot } \mathbf{F}$  также равна правой части равенства (1).

241. Напряженность  $\mathbf{E}$  вихревого электрического поля перпендикулярна вектору  $\mathbf{H}$  и не зависит от координат  $\psi$  и  $z$ . Из уравнения Максвелла (III. 1) вытекает

$$\frac{\partial}{\partial r} (rE) = -\frac{r}{c} \frac{\partial H}{\partial t},$$

где использовано  $E_r = E_z = 0$  и  $E_\psi = E(r, t)$ . Интегрирование последнего уравнения с учетом ограниченности функции  $E(r, t)$  при  $r = 0$  дает

$$E = -\frac{1}{cr} \int_0^r \xi \frac{\partial H(\xi, t)}{\partial t} d\xi.$$

Непосредственным дифференцированием нетрудно убедиться, что напряженность  $\mathbf{E}$  найденного вихревого электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  и  $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ , в ко-

торых заданная функция  $\mathbf{H}$  является решением волнового уравнения (III.11).

242. Используя результаты предыдущей задачи, находим напряженность вихревого электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра шара. Момент сил, приложенный к шару,

$$\int (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{E}) dV = -\frac{QR^2}{5c} \frac{d\mathbf{H}}{dt}.$$

Производная по времени от механического момента

$$\mathbf{M} = \frac{2}{5} mR^2 \omega$$

шара равна моменту внешних сил. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2mc} \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

интегрирование которого с учетом начального условия дает следующее значение угловой скорости:

$$\omega = -\frac{QH}{2mc}.$$

243. Второе слагаемое подынтегрального выражения в правой части равенства

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \left( \frac{\operatorname{div} \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{j} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'$$

преобразуем к другому виду, используя формулу (III.28):

$$\mathbf{j} \operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \operatorname{div}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\operatorname{div}' \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

где штрих у градиента и дивергенции обозначает дифференцирование по штрихованным координатам. При помощи теоремы Гаусса — Остроградского (III.15) один из объемных интегралов преобразуем в поверхностный

$$\int_{V \rightarrow \infty} \operatorname{div}' \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \oint_{S \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS',$$

который, как легко видеть, равен нулю.

Непосредственной проверкой с учетом уравнения непрерывности (III.6) нетрудно убедиться в равенстве

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \operatorname{div}' \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x'} + \frac{\partial j_y}{\partial y'} + \frac{\partial j_z}{\partial z'} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где объемная плотность тока зависит от времени с учетом запаздывания

$$\mathbf{j} = \mathbf{j} \left( \mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right).$$

После этого дивергенция от запаздывающего векторного потенциала запишется в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Правая часть полученного равенства с противоположным знаком равна  $\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Следовательно, запаздывающие электромагнитные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца.

$$244. \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla^2 \Phi = -4\pi \rho.$$

## § 2. Плотность заряда и тока

$$245. \rho = e\delta \left( x - l - \frac{vt}{\sqrt{2}} \right) \delta \left( y - \frac{vt}{\sqrt{2}} \right) \delta(z), \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}.$$

$$246. \rho = e\delta(x - a \sin \omega t) \delta(y) \delta(z), \quad j_x = \rho a \omega \cos \omega t, \quad j_y = j_z = 0; \\ \bar{\rho} = \frac{e}{\pi} \frac{\delta(y) \delta(z)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ при } |x| < a, \quad \bar{\rho} = 0 \text{ при } |x| > a; \quad \mathbf{j} = 0.$$

$$247. \rho = \frac{e}{R} \delta(r - R) \delta(\psi - \omega t + 2\pi n) \delta(z), \quad j_r = j_z = 0, \\ j_\psi = \rho R \omega. \text{ Здесь целое положительное число } n \text{ для каждого момента времени } t \text{ выбирается из условия } 2\pi n \leq \omega t \leq 2(n+1)\pi.$$

$$248. \rho = \frac{q}{R \sin \theta} \delta(r - R) [\delta(\psi - \omega t + 2\pi n) + \\ + \delta(\psi - \omega t + 2\pi n + \pi)],$$

$j_z = j_\theta = 0$ ,  $j_\psi = \rho \omega R \sin \theta$ , где для каждого фиксированного момента времени  $t$  целое положительное число  $n$  выбирается из условия  $2\pi n \leq \omega t \leq 2(n+1)\pi$ .

249.  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \eta(R - r)$ ,  $\mathbf{j} = \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ . Здесь  $\eta(\alpha)$  — ступенчатая функция аргумента  $\alpha$ , которая определена в ((ПЗ. 21).

250.  $\mathbf{E} = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}$ ,  $\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3}$ , где  $\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_e(t)$  — радиус-вектор движущегося заряда  $e$ .



### § 3. Магнитный, дипольный и квадрупольный моменты движущихся зарядов

$$251. \mu = \frac{QR^2}{5c} \omega; \quad \beta = \frac{Q}{2mc}.$$

$$252. \mu = \frac{m_1 m_2}{2c(m_1 + m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) M.$$

253. Полный импульс частиц в рассматриваемой системе координат должен равняться нулю  $\mathbf{P} = 0$ .

254. Элемент  $dS = r dr d\theta$  поверхности диска, расположенный в точке со сферическими координатами  $r$  и  $\theta$ , при своем вращении создает круговой ток

$$dI = \frac{\sigma \omega}{\pi} dS.$$

Магнитный момент этого тока имеет вид

$$d\mu = \frac{\sigma \omega}{c} r^2 \sin^2 \theta dS.$$

После интегрирования получим

$$\mu = \frac{QR^2}{8c} \omega.$$

$$255. \mu = \frac{5qa^3}{6c} \omega.$$

$$256. \mathbf{I}_H(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_H(t)).$$

257. Траектория частицы в полярных координатах имеет вид

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \psi,$$

где фокальный параметр  $p$  и эксцентриситет  $\varepsilon$  даются формулами

$$p = \frac{M^2}{m|\alpha|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{m\alpha^2}}.$$

Средний за период  $T$  дипольный момент движущегося заряда направлен вдоль полярной оси. Его проекция на эту ось

$$d_x = \frac{e}{T} \int_0^T r \cos \psi dt = \frac{emp^3}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \psi d\psi}{(1 + \varepsilon \cos \psi)^3}. \quad (1)$$

При замене переменной интегрирования использовано уравнение траектории и закон сохранения момента, который дает связь между приращениями времени и полярного угла

$$dt = \frac{m}{M} r^2 d\psi.$$

Далее воспользуемся табличным интегралом

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\beta + \varepsilon \cos \psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon^2}}.$$

Путем дифференцирования обеих частей последнего равенства по параметрам  $\beta$  и  $\varepsilon$  с последующей подстановкой  $\beta = 1$  находим значение интеграла в выражении (1). В результате получим

$$dx = -\frac{3}{2} \varepsilon e a, \quad (2)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2\mathcal{E}}.$$

Чтобы определить постоянный вектор  $\mathbf{I}$ , вычислим его величину в фиксированной точке траектории с координатами  $\psi = 0$  и  $r = a(1 - \varepsilon)$ . В этой точке имеем

$$\mathbf{I} = (vM + \alpha) \mathbf{1}_x = -2\mathcal{E} \varepsilon a \mathbf{1}_x. \quad (3)$$

Таким образом, сохраняющийся вектор  $\mathbf{I}$  направлен вдоль полярной оси  $X$ , на которой расположена большая полуось эллиптической траектории частицы.

Из сравнения выражений (2) и (3) окончательно находим

$$\mathbf{d} = \frac{3e}{4\mathcal{E}} \mathbf{I}.$$

$$258. \quad \rho(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{d} \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{d}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) - \dot{\mathbf{r}}_d (\mathbf{d} \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d),$$

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c} [(\mathbf{r}_d \times \dot{\mathbf{d}}) + (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{r}}_d)].$$

У к а з а н и е. Точечный диполь следует рассматривать как предельный случай системы двух зарядов  $e$  и  $-e$ , расстояние  $l$  между которыми стремится к нулю, а абсолютные величины зарядов — к бесконечности (см., например, решение задачи 89). Искомые величины определяются при помощи формул (III.5) и (III.9), в которых необходимо перейти к двойному пределу  $l \rightarrow 0$  и  $e \rightarrow \infty$  с учетом соотношения

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el = \mathbf{d},$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен в сторону положительного заряда.

$$259. \quad D_{11} = -D_{22} = -3Rd \sin 2\omega t, \quad D_{12} = 3Rd \cos 2\omega t, \quad D_{13} = D_{23} = D_{33} = 0.$$

260.  $D_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $D_{11} = \frac{e\alpha^2}{8\mathcal{E}^2} (1 + 9\epsilon^2)$ ,  $D_{22} = \frac{e\alpha^2}{8\mathcal{E}^2} (1 - 6\epsilon^2)$ ,  
 $D_{33} = -\frac{e\alpha^2}{8\mathcal{E}^2} (2 + 3\epsilon^2)$ , где  $\epsilon$  — эксцентриситет эллиптической траектории:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{m\alpha^2}}.$$

$$261. \quad E_\alpha = \frac{3(\mathbf{dr})x_\alpha - r^2 d_\alpha}{r^5} + \left(\frac{5}{2}x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \frac{D_{\beta\gamma} x_\gamma}{r^7},$$

где введено обозначение  $d_1 = -\frac{3}{2}e\epsilon a$ ,  $d_2 = d_3 = 0$ ,  $D_{\alpha\beta} = 0$

при  $\alpha \neq \beta$ ,  $D_{11} = \frac{ea^2}{2} (1 + 9\epsilon^2)$ ,  $D_{22} = \frac{ea^2}{2} (1 - 6\epsilon^2)$ ,

$$D_{33} = -\frac{ea^2}{2} (2 + 3\epsilon^2), \quad a = \frac{e^2}{2|\mathcal{E}|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{me^4}}.$$

Для круговой траектории

$$E_x = \frac{Dx}{r^7} (r^2 - 5z^2), \quad E_y = \frac{Dy}{r^7} (r^2 - 5z^2), \quad E_z = \frac{Dz}{r^7} (3r^2 - 5z^2),$$

где  $D = \frac{3}{4}ea^2$ .

У к а з а н и е. Воспользоваться результатами задач 257 и 260.

#### § 4. Электромагнитные волны

$$262. \quad \mathbf{s} = \frac{l^2}{4\pi\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\right)^2 \mathbf{k}, \quad \omega = \frac{l^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\right)^2.$$

$$263. \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} R A_0^2 h k k.$$

$$264. \quad \mathbf{F} = \frac{1}{4} R^2 A_0^2 k k.$$

265. Направление вектора  $\mathbf{k}$  выберем в качестве оси  $Z$ , а другие оси  $X$  и  $Y$  направим вдоль векторов поляризации  $\mathbf{l}^{(1)}$  и  $\mathbf{l}^{(2)}$  линейно-поляризованной волны. Тогда

$$\sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{A} \mathbf{l}^{(\lambda)}) (\mathbf{B} \mathbf{l}^{(\lambda)}) = A_x B_x + A_y B_y.$$

К правой части этого равенства прибавим и вычтем выражение  $A_z B_z$ . Первые три слагаемых полученной суммы составляют скалярное произведение  $\mathbf{AB}$ , а последнее запишем как

$$-A_z B_z = -\frac{1}{k^2} (\mathbf{Ak}) (\mathbf{Bk}).$$

В результате заданная сумма представлена нами в виде слагаемых, содержащих лишь скалярные произведения векторов. Следовательно,

она имеет один и тот же вид во всех системах координат, повернутых друг относительно друга на некоторый угол.

Для циркулярной волны в указанной выше системе координат имеем  $\mathbf{b}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1_x + i1_y)$  и  $\mathbf{b}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1_x - i1_y)$ . Дальнейшие рассуждения аналогичны.

266. Запишем напряженности электрических полей в комплексном виде. Тогда для суммарной волны получим

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ [\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02} e^{i\chi}] e^{i(kr - \omega t - \alpha)} \},$$

где  $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$ . Введем обозначение

$$\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02} e^{i\chi} = (\mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2) e^{-i\alpha},$$

где  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  — вещественные векторы:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos \alpha + \mathbf{E}_{02} \cos (\alpha + \chi),$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{E}_{01} \sin \alpha + \mathbf{E}_{02} \sin (\alpha + \chi).$$

Подберем фазу  $\alpha$  так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \text{tg } 2\alpha = -\text{tg } \chi.$$

Для этого необходимо, чтобы

$$\alpha = -\frac{\chi}{2} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}.$$

После этого векторы  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  запишутся как

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \cos \frac{\chi}{2},$$

$$\mathbf{b}_2 = (-\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}) \sin \frac{\chi}{2}.$$

Таким образом, результирующая волна эллиптически-поляризованная. Главные оси эллипса поляризации повернуты относительно векторов  $\mathbf{E}_{01}$  и  $\mathbf{E}_{02}$  на угол  $\pi/4$  по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны. Если векторы  $\mathbf{E}_{01}$ ,  $\mathbf{E}_{02}$  и  $\mathbf{k}$  образуют правовинтовую тройку и

$$\sin \frac{\chi}{2} > 0, \quad \cos \frac{\chi}{2} > 0,$$

то поляризация результирующей волны правая. В общем случае направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  суммарной волны зависит от ориентации векторов  $\mathbf{E}_{01}$  и  $\mathbf{E}_{02}$  и знаков величин

$$\cos \frac{\chi}{2}, \quad \sin \frac{\chi}{2}.$$

В системе координат с осями  $X$  и  $Z$ , параллельными векторам  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{k}$  соответственно, проекции напряженности электрического поля

суммарной волны запишутся как

$$E_x = b_1 \cos \left( \omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

$$E_y = b_2 \sin \left( \omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

где  $b_1 = \sqrt{2} E_{01} \cos \frac{\chi}{2}$ ,  $b_2 = \sqrt{2} E_{02} \sin \frac{\chi}{2}$ .

267. Напряженность электрического поля суммарной волны

$$\mathbf{E} = 2E_0 \left( i_x \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + i_y \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \cos \left( \omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right),$$

где  $E_0$  и  $\omega$  — амплитуда и частота обеих циркулярных волн, а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — постоянная фаза соответственно право- и левополяризованной волны ( $\omega = kc$ ). Величина  $E_0$  численно равна модулю вектора напряженности электрического поля каждой циркулярной волны.

268. Результирующая волна эллиптически-поляризованная. Полуоси эллипса поляризации равны  $A + B$  и  $|A - B|$ . Поляризация волны правая при  $A > B$  и левая, если  $A < B$ .

269. Результирующая волна эллиптически-поляризованная. Полуоси  $b_1$  и  $b_2$  эллипса поляризации

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_{01} + E_{02}|, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |E_{02} - E_{01}|.$$

Поляризация волны правая, если вектор  $\mathbf{E}_{01} \times \mathbf{E}_{02}$  параллелен волновому вектору  $\mathbf{k}$ , и левая, если указанные векторы антипараллельны.

270. Выберем ось  $X$  вдоль вектора  $\mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{02}$ , а ось  $Z$  — по направлению распространения волн. Тогда проекции вектора напряженности электрического поля суммарной волны принимают вид

$$E_x = \sqrt{2} E_{01} \cos \chi \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z \right),$$

$$E_y = \sqrt{2} E_{01} \sin \chi \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} z \right),$$

где обозначено  $\chi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} z$ . В каждой точке пространства эллипс поляризации суммарной волны деформируется со временем от отрезка, направленного вдоль оси  $X$  (при  $\chi = 0$ ), в эллипс с правым вращением вектора  $\mathbf{E}$  и далее в окружность (при  $\chi = \pi/4$ ). Затем окружность переходит в эллипс с правым вращением, который постепенно сплющивается в отрезок (при  $\chi = \pi/2$ ), направленный вдоль оси  $Y$ . При дальнейшем увеличении  $\chi$  в пределах от  $\pi/2$  до  $\pi$  картина повторяется, но с левым вращением вектора  $\mathbf{E}$ , и так далее. Когда эллипс вырождается в отрезок, волна становится линейно-поляризованной.

271.

$$E = 2E_0 (I_x \cos \chi + I_y \sin \chi) \cos \Phi,$$

$$\chi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \left( t - \frac{z}{c} \right) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

$$\Phi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \left( t - \frac{z}{c} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — постоянные фазы право- и левополяризованных циркулярных волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$ .  $E_0$  — амплитуда этих волн, численно равная модулю вектора напряженности электрического поля. Результирующая волна линейно-поляризованная. Однако в каждой точке пространства ее вектор поляризации медленно вращается с частотой  $|\omega_1 - \omega_2|$  около направления распространения.

$$272. E = IE_0 \exp \left[ -\frac{\Delta^2}{4} \left( t - \frac{\mathbf{kr}}{kc} \right)^2 \right].$$

$$273. E = IE_0 \frac{\sin \left[ \Delta \left( t - \frac{\mathbf{kr}}{kc} \right) \right]}{\omega_0 \left( t - \frac{\mathbf{kr}}{kc} \right)} \cos \left[ \omega_0 \left( t - \frac{\mathbf{kr}}{kc} \right) + \alpha \right].$$

$$274. E = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ E'(\omega) \cos \left( \omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c} \right) + E''(\omega) \sin \left( \omega t - \frac{\omega \mathbf{nr}}{c} \right) \right] d\omega,$$

где  $E'(\omega)$  и  $E''(\omega)$  — вещественная и мнимая части компоненты Фурье заданной напряженности электрического поля:

$$E'(\omega) + iE''(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t') e^{i\omega t'} dt'.$$

$$275. E(k, \omega) = \frac{2(2\pi)^3 \tau E_0}{\omega^2 \tau^2 + 1} \delta \left( k - \frac{n\omega}{c} \right).$$

$$276. E = \sqrt{\pi} E_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{4} \left( t - \frac{\mathbf{nr}}{c} \right)^2}.$$

$$277. E_k = -i \frac{4\pi e k}{k^2 + a^2}.$$

Указание. Разложить в пространственный интеграл Фурье обе части равенства  $E = -\text{grad } \varphi$  и получить связь между компонентами Фурье обеих частей этого равенства  $E_k = -ik\varphi_k$ . Компонента Фурье  $\varphi_k$  от потенциала находится путем непосредственного вычисления интеграла

$$\varphi_k = e \int \frac{1}{r} e^{-ikr} dV = \frac{4\pi e}{k^2 + a^2}.$$

$$278. E_r = E_\psi = 0, \quad E_\theta = \frac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \sin \theta};$$

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{2J_0 \cos(\omega t - kr)}{cr \sin \theta}.$$

279. При  $r < R$ :

$$E_z = E_\psi = 0, \quad E_r = \frac{2J_0}{cr} \cos(\omega t - kz),$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{2J_0}{cr} \cos(\omega t - kz);$$

при  $r > R$ :

$$E_z = E_\psi = 0, \quad E_r = \frac{4J_0}{cr} \cos kz \cos \omega t,$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\psi = \frac{4J_0}{cr} \sin kz \sin \omega t.$$

## § 5. Дифракция

280. Выберем оси  $X$  и  $Y$  в плоскости экрана, причем ось  $Y$  совместим с осевой линией щели, как показано на рис. 9. Жирная линия обозначает этот экран в разрезе. Дифрагированное поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, z, t)$  за экраном однородно вдоль оси  $Y$ . Оно удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

и граничному условию на плоскости  $XY$ :

$$\mathbf{E}(x, 0, t) = I_y E_0 g(x) \cos \omega t,$$

где  $g(x) = 1$  при  $|x| \leq a$  и  $g(x) = 0$  при  $|x| > a$ . Это граничное условие является приближенным. Оно применимо лишь при малом отклонении от геометрической оптики  $ka \gg 1$ .

Удобно сначала решить более простую вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mathcal{E}(x, 0, t) = I_y E_0 g(x) e^{-i\omega t}.$$

Тогда решение исходной задачи записывается как  $\mathbf{E}(x, z, t) = \text{Re } \mathcal{E}(x, z, t)$ .

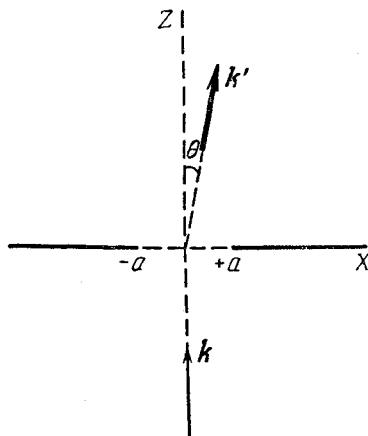


Рис. 9.

Видно, что решение вспомогательной задачи следует искать в виде

$$\mathcal{E}(x, z, t) = l_y E_0 f(x, z) e^{-i\omega t}.$$

Функция  $f(x, z)$  определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0 \quad (1)$$

с граничным условием

$$f(x, 0) = g(x). \quad (2)$$

Разложим искомую функцию  $f(x, z)$  в интеграл Фурье по переменной  $x$ :

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q, z) e^{iqx} dq.$$

Из основного уравнения (1) получаем простое дифференциальное уравнение для компоненты Фурье  $\psi(q, z)$  с фиксированным значением параметра  $q$ :

$$\frac{d^2 \psi(q, z)}{dz^2} + (k^2 - q^2) \psi(q, z) = 0.$$

Его решение

$$\psi(q, z) = F(q) e^{i\sqrt{k^2 - q^2} z} + \Phi(q) e^{-i\sqrt{k^2 - q^2} z}.$$

Таким образом, искомая функция  $f(x, z)$  разбивается на два слагаемых

$$f(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{i(qx + \sqrt{k^2 - q^2} z)} dq + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(q) e^{i(qx - \sqrt{k^2 - q^2} z)} dq. \quad (3)$$

Если принять во внимание временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , то становится ясно, что первое слагаемое суммы (3) описывает волны, распространяющиеся от щели, а второе — волны обратного направления. Согласно условию задачи второе слагаемое должно отсутствовать:  $\Phi(q) \equiv 0$ .

Из граничного условия (2) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{iqx} dq = g(x),$$



т. е. величина  $F(q)$  является компонентой Фурье функции  $g(x)$ .  
Окончательно

$$\begin{aligned} E(x, z, t) &= I_y E_0 \operatorname{Re} (f(x, z) e^{-i\omega t}) = \\ &= I_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{i(qx + \sqrt{k^2 - q^2} z - \omega t)} dq. \end{aligned}$$

Проведенные рассуждения справедливы также для совокупности бесконечных щелей, параллельных оси  $Y$ . Для одной щели получаем

$$\begin{aligned} F(q) &= \int_{-a}^a e^{-iqx} dx = 2 \frac{\sin qa}{q}, \\ E(x, z, t) &= I_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^k \frac{\sin qa}{q} \cos(\omega t - qx - \sqrt{k^2 - q^2} z) dq + \\ &+ I_y \frac{2E_0}{\pi} \int_k^{\infty} \frac{\sin qa}{q} e^{-\sqrt{q^2 - k^2} z} \cos qx dq \cos \omega t. \end{aligned}$$

Первое слагаемое напряженности  $E(x, z, t)$  электрического поля представляет собой бегущую волну, распространяющуюся от экрана. Второе слагаемое — стоячая волна, амплитуда которой отлична от нуля только вблизи экрана. Второе слагаемое по порядку величины меньше первого в отношении  $\frac{1}{ka} \ll 1$ . Оно должно быть отброшено, чтобы не превышать принятую точность вычисления. Таким образом, дифрагированная волна имеет вид

$$E(x, z, t) = I_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^k \frac{\sin qa}{q} \cos(\omega t - \mathbf{k}' \mathbf{r}) dq,$$

где волновой вектор  $\mathbf{k}' = I_x q + I_z \sqrt{k^2 - q^2}$  составляет угол  $\theta$  с направлением распространения падающей волны. Его компонента, лежащая в поперечной плоскости  $XY$ , связана с углом дифракции  $\theta$  соотношением

$$q = k \sin \theta \approx k\theta.$$

Рассмотрим бесконечную полосу единичной ширины ( $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $y_0 \leq y \leq y_0 + 1$ , где  $y_0$  произволен), которая расположена на некотором расстоянии  $z$  от экрана. Поток электромагнитной энергии

через поверхность этой полосы в среднем по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  дается выражением

$$I = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{E^2(x, z, t)} dx = \frac{cE_0^2}{4\pi^2} \int_{-k}^k \frac{\sin^2 qa}{q^2} dq, \quad (4)$$

где черта над квадратом напряженности электрического поля дифрагированной волны обозначает усреднение по времени за период колебания.

Величина  $I$  не зависит от  $z$ . Значит, она совпадает со средней по времени интенсивностью  $I_0 = cE_0^2 a / 4\pi$  падающей волны, отнесенной к единице длины щели, если пренебречь малыми слагаемыми порядка  $1/ka$ .

Эффективная область углов дифракции заключена в пределах  $0 \leq \theta \leq \theta_m \ll 1$ . Считаем, что длина падающей волны настолько мала, что  $ka\theta_m \gg 1$ . Поэтому отнесенная к единице длины интенсивность (4) дифрагированной волны запишется как

$$I = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\theta_m}^{\theta_m} \frac{\sin^2 ka\theta}{ka\theta^2} d\theta.$$

Отсюда находим угловое распределение интенсивности дифрагированной волны

$$dI = I_0 \frac{\sin^2 ka\theta}{\pi ka\theta^2} d\theta.$$

Этот результат можно также получить непосредственно из формул (III. 25) — (III. 27).

281. Повторяя рассуждения, проведенные при решении предыдущей задачи, получаем

$$\begin{aligned} E(x, z, t) &= 1_y \frac{E_0}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(q) e^{i(qx + \sqrt{k^2 - q^2} z - \omega t)} dq, \\ F(q) &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2nb-a}^{2nb+a} e^{-iqx} dx = \frac{1}{iq} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-iq(2nb-a)} - e^{-iq(2nb+a)}) = \\ &= 2 \frac{\sin qa}{q} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2nqb} = 2 \frac{\sin qa}{q} \frac{1 - e^{-i2Nqb}}{1 - e^{-i2qb}} = \\ &= 2 \frac{\sin qa}{q} \frac{\sin Nqb}{\sin qb} e^{-i(N-1)qb} \end{aligned}$$

Опустим малые слагаемые порядка  $\frac{1}{ka} \ll 1$ , тогда напряженность электрического поля дифрагированной волны, распространяющейся под малыми углами дифракции, примет вид

$$E(x, z, t) = 1_y \frac{E_0}{\pi} \int_{-k}^k \frac{\sin qa}{q} \frac{\sin Nqb}{\sin qb} \cos[\omega t - qx - \sqrt{k^2 - q^2} z + (N-1)qb] dq.$$

Отсюда находим отнесенную к единице длины интенсивность дифрагированной волны в интервале углов  $d\theta$  в среднем по времени за период колебания

$$dI = \frac{I_0}{\pi N} \left( \frac{\sin Nkb\theta}{\sin kb\theta} \right)^2 \frac{\sin^2 ka\theta}{ka\theta^2} d\theta,$$

где  $I_0$  — усредненная по времени и отнесенная к единице длины полная интенсивность электромагнитной волны, проходящей через все щели.

$$282. \quad dI = \frac{I_0}{\pi^2 ab} \frac{\sin^2(ka\theta \cos \psi) \sin^2(kb\theta \sin \psi)}{k^2 \theta^4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi} d\Omega,$$

где  $I_0$  — усредненная по времени полная интенсивность электромагнитной волны, проходящей через прямоугольное отверстие, а  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы точки наблюдения.

У к а з а н и е. Воспользоваться формулами (III. 25) — (III. 27).

283. В интеграле (III. 25) проведем замену переменных интегрирования  $x = r \cos \varphi$  и  $y = r \sin \varphi$ , где  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты в плоскости экрана, а начало координат выбрано в центре отверстия. Угол  $\varphi$  отсчитывается от вектора  $\mathbf{q}$ . Далее воспользуемся интегральным представлением (П6.7) для функции Бесселя нулевого порядка. Тогда

$$u_q = u_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-iqr \cos \varphi} r dr d\varphi = 2\pi u_0 \int_0^R J_0(qr) r dr.$$

Согласно соотношению (П6.15) имеем

$$u_q = 2\pi u_0 R \frac{J_1(qR)}{q}.$$

Подставим найденную компоненту Фурье в общую формулу (III. 27) и используем (III. 26). В результате угловое распределение интенсивности электромагнитной волны при дифракции на круглом отверстии примет вид

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(kR\theta)}{\pi\theta^2} d\Omega,$$

где  $I_0$  — усредненная по времени полная интенсивность электромагнитной волны, проходящей через отверстие.

$$284. \quad dI = I_0 \frac{[R_2 J_1(kR_2\theta) - R_1 J_1(kR_1\theta)]^2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)\theta^2} d\Omega,$$

где  $I_0$  — усредненная по времени полная интенсивность электромагнитной волны, проходящей через кольцевое отверстие.

285. Компонента Фурье дифрагированной волны выражается в виде двукратного интеграла (III.25) по площади эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ . Замена переменных интегрирования  $x = ar \cos \varphi$  и  $y = br \sin \varphi$  приводит к интегрированию по площади круга единичного радиуса. Угол  $\varphi$  отсчитывается от вектора  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_x a q_x + \mathbf{I}_y b q_y$ . Принимая во внимание интегральное представление функции Бесселя (П6.7), находим

$$u_q = abu_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-iQr \cos \varphi} r dr d\varphi = 2\pi abu_0 \int_0^1 J_0(Qr) r dr.$$

При помощи формулы (П6.15) преобразуем полученное выражение

$$u_q = 2\pi abu_0 \frac{J_1(Q)}{Q}.$$

После этого воспользуемся общими формулами (III.26) и (III.27), которые приводят к искомому результату

$$dI = I_0 \frac{ab J_1^2(k\theta \sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi})}{\pi \theta^2 (a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} d\Omega.$$

В этой формуле  $I_0$  — усредненная по времени полная интенсивность электромагнитной волны, проходящей через эллиптическое отверстие, а  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы точки наблюдения.

286.  $dI = I_0 \frac{\sin^2 ka\theta}{\pi ka\theta^2} d\theta$ , где  $I_0$  — средняя по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность электромагнитной волны, падающей на единицу длины пластины.

287.  $dI = I_0 \frac{J_1^2(kR\theta)}{\pi \theta^2} d\Omega$ , где  $I_0$  — усредненная по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  полная интенсивность электромагнитной волны, поглощаемой абсолютно черным шаром.

## Глава IV

### ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИМИСЯ ЗАРЯДАМИ

#### § 1. Дипольное излучение

288. Начало координат расположим в точке влета частицы в конденсатор, а ось  $X$  направим в сторону движения перпендикулярно пластинам. Из уравнения Ньютона  $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$  определяем ускорение частицы, которое входит в формулу интенсивности дипольного излучения. После этого получаем

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3}.$$

Время  $t_d$  движения найдем, приравняв  $x$ -ю координату частицы

$$x = \frac{eEt_d^2}{2m} + v_0 t_d \cos \alpha$$

расстоянию  $l$  между обкладками конденсатора. Энергия, излученная за время пролета через конденсатор, запишется как

$$\mathcal{E} = \frac{2e^3 E v_0}{3mc^3} \left( \sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

289. Пусть начало координат выбрано в центре шара, а движение происходит вдоль оси  $X$ . При помощи уравнения движения  $m\ddot{x} = \frac{Qe}{R^3} x$  определяем ускорение и записываем интенсивность излучения как функцию координаты частицы

$$I = \frac{2Q^2 e^4 x^2}{3m^2 c^3 R^6}.$$

Здесь использован тот факт, что влияние поля излучения на движение частицы незначительно и им можно пренебречь. Для вычисления энергии

$$\mathcal{E} = \int_{-R}^R I \frac{dx}{\dot{x}},$$

теряемой частицей на дипольное излучение во время пролета через шар, воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathcal{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3} (x^2 - R^2).$$

Энергия  $\mathcal{E}$  излучения ничтожно мала по сравнению с полной энергией частицы и поэтому отброшена. В этих условиях скорость  $\dot{x}$  является простой функцией координаты частицы, и интеграл по переменной  $x$  легко вычисляется:

$$\mathcal{E} = \frac{2Qe^3}{3mc^2 R^2} \sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2 R}} \times \\ \times \left[ \left( \frac{2\mathcal{E}_0 R}{|Qe|} + 1 \right) \arcsin \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0 R}{|Qe|} + 1}} - \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0 R}{|Qe|}} \right].$$

$$290. \quad \mathcal{E} = \frac{2\pi e^3 H v^2}{3mc^4}.$$

291.  $\mathcal{E} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^5} \left[ v_{0x}^2 + \left( v_{0y} + \frac{E}{H} c \right)^2 \right] t$ , где оси  $X$  и  $Y$  выбраны вдоль векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  соответственно.

$$292. \quad I = \frac{j_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3}.$$

293. Уравнение движения осциллятора с учетом силы радиационного трения запишется так:

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Сила радиационного трения мала по сравнению с упругой силой осциллятора. Поэтому в соответствующем однородном уравнении с большей точностью справедлива замена  $\ddot{\mathbf{r}} \rightarrow -\omega_0^2 \mathbf{r}$ , которая приводит к уравнению колебаний при наличии трения

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma_0 \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0,$$

где  $\gamma_0 = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}$ ,  $\gamma_0 \ll \omega_0$ . Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения затухает со временем. Устано-

вившиеся колебания осциллятора описываются частным решением уравнения (1), пропорциональным внешней силе,

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t - \omega \gamma \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3}.$$

Средняя по времени за период  $T$  интенсивность излучения осциллятора

$$I = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

294. Ускорение электрона находим из уравнения Ньютона  $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze^2 \mathbf{r}}{r^3}$ . Это позволяет записать полную энергию излучения в виде

$$\mathcal{E} = \frac{2Z^2 e^6}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4}. \quad (1)$$

Ради удобства считаем, что электрон движется в плоскости  $XY$ , а в момент времени  $t = 0$  пересекает ось  $Y$  (рис. 10). Поскольку траектория близка к прямолинейной, скорость электрона во время пролета мимо ядра меняется незначительно  $v_x = v_0$ . Поэтому интеграл (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(l^2 + v_0^2 t^2)^2} = \\ &= \frac{2}{v_0 l^3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2v_0 l^3}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\mathcal{E} = \frac{\pi Z^2 e^6}{3m^2 c^3 v_0 l^3}.$$

$$295. \text{ а) } \mathcal{E} = \frac{3\pi e^4 d^2}{8m^2 c^3 v_0 l^5};$$

$$\text{ б) } \mathcal{E} = \frac{7\pi e^4 d^2}{8m^2 c^3 v_0 l^5}.$$

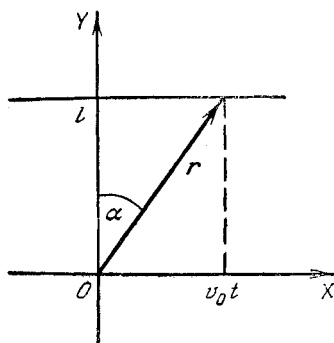


Рис. 10.

296. Уравнение движения имеет вид  $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{3De\mathbf{r}}{4r^5}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор электрона в плоскости  $XY$ . Из этого уравнения определяем ускорение, которое входит в формулу интенсивности излучения. Тогда интенсивность дипольного излучения, обусловленная

взаимодействием электрона с квадрупольным моментом атома, запишется так:

$$I = \frac{3D^2 e^4}{8m^2 c^3 r^3}.$$

Пусть в момент времени  $t = 0$  электрон пересекает ось  $Y$  (см. рис. 10). Траектория движения близка к прямолинейной. Значит, кинетическая энергия электрона велика по сравнению с потенциальной. Поскольку движение быстрое и электрон пролетает далеко от силового центра, его скорость по модулю меняется незначительно  $v_x = v_0$  и  $x = v_0 t$ . Это обстоятельство облегчает вычисление полной энергии, потерянной электроном на дипольное излучение,

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I \frac{dx}{v_0} = \frac{3D^2 e^4}{4m^2 c^3 v_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + l^2)^4} = \frac{15\pi D^2 e^4}{128m^2 c^3 v_0 l^7}.$$

297. В системе центра инерции суммарный дипольный момент обоих осколков

$$d_x = \frac{eA_1 A_2}{A_1 + A_2} \left( \frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right) x \equiv Q_{эфф} x, \quad d_y = d_z = 0.$$

Величину  $Q_{эфф}$  можно рассматривать как эффективный заряд частицы с приведенной массой

$$\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m.$$

Движение частицы с приведенной массой происходит вдоль оси  $X$  и описывается уравнением

$$\mu \ddot{x} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x^2}$$

с дополнительным условием  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ .

Полная энергия дипольного излучения

$$\mathcal{E} = \frac{2Q_{эфф}^2 Z_1^2 Z_2^2 e^4}{3\mu^2 c^3} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4 \dot{x}},$$

где  $x_0$  — начальное расстояние между осколками.

Из закона сохранения энергии

$$\frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} = \mathcal{E}_0$$

определяем скорость  $\dot{x}$  как функцию координаты  $x$ , что позволяет преобразовать последний интеграл к следующему виду:

$$\mathcal{E} = \frac{2Q_{эфф}^2 \mathcal{E}_0^3}{3\mu^2 c^3 Z_1 Z_2 e^4} \left( \frac{\mu}{2\mathcal{E}_0} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{(1 - \xi)^{1/2}}.$$



Окончательно энергия дипольного излучения запишется так:

$$\mathcal{E} = \frac{16}{45} \left( \frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right)^2 \left( \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \right)^{1/2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^{3/2} \frac{\mathcal{E}_0}{Z_1 Z_2}.$$

298. Интенсивность  $I$  излучения протона пропорциональна его кинетической энергии

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{r}^2 = \frac{4e^4 H^2 \mathcal{E}}{3m^3 c^5}.$$

Это позволяет составить дифференциальное уравнение для искомой величины

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{4e^4 H^2}{3m^3 c^5} \mathcal{E}.$$

Решение последнего уравнения дает ответ на поставленную задачу:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp \left( -\frac{4e^4 H^2 t}{3m^3 c^5} \right).$$

$$299. \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp \left( -\frac{2e^2 \omega^2 t}{3mc^3} \right).$$

300. Отклонение от кругового движения, вызванное потерей энергии электрона на излучение, весьма мало за один оборот вокруг ядра. Поэтому в каждый момент времени кинетическая и потенциальная энергии электрона выражаются через его полную энергию  $\mathcal{E}$ . Это обстоятельство дает возможность выразить интенсивность дипольного излучения через полную энергию электрона

$$I = \frac{2e^2 \ddot{r}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \frac{Ze^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3 (mZe)^2}.$$

Энергия электрона расходуется на излучение

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3 (mZe)^2},$$

откуда получаем закон убывания полной энергии электрона

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32t}{(mZe)^2 c^3},$$

где  $\mathcal{E}_0 = -Ze^2/2R$  — начальное значение полной энергии. Время падения электрона на силовой центр получим, устремляя энергии  $\mathcal{E}$  к бесконечности со знаком минус:

$$t_{\Pi} = \frac{m^2 c^3 R^3}{4Ze^4}.$$

301. Электрон внутри равномерно заряженного шара представляет собой осциллятор, колеблющийся с частотой  $\omega = \frac{|e|}{R \sqrt{mR}}$ . Излучаемые электромагнитные волны имеют ту же частоту. Если

учесть силу  $\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}$  радиационного трения, то колебательное движение электрона станет медленно затухающим. При этом с большой точностью выполняется соотношение  $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{r}$ . В соответствии с начальными условиями движение электрона одномерное и описывается уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

с решением вида

$$x = R e^{-\gamma t/2} \cos \omega t.$$

Здесь обозначено  $\gamma = \frac{2e^2 \omega^2}{3mc^3}$  ( $\gamma \ll \omega$ ). Усредненная по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$  полная энергия электрона определяется выражением

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} \overline{\dot{x}^2} + \frac{m\omega^2}{2} \overline{x^2} = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 e^{-\gamma t}.$$

302. Вторая производная по времени от дипольного момента системы выражается через сумму всех сил, приложенных к частицам. Равнодействующая этих сил в случае замкнутой системы обращается в нуль. Поэтому интенсивность дипольного излучения равна нулю.

303. При вычислении энергетических потерь единицы объема электронного газа можно суммировать не амплитуды поля, а интенсивности излучения отдельных электронов. Это связано с тем, что среднее расстояние между электронами сравнимо с радиусом волновой зоны, а разности фаз излучаемых электронами волны распределены хаотично. Интенсивность излучения отдельного электрона во внешнем однородном магнитном поле с напряженностью  $\mathbf{H}$  дается формулой

$$I(v_{\perp}) = \frac{2e^4 H^2 v_{\perp}^2}{3m^2 c^5}, \quad (1)$$

где  $v_{\perp}$  — составляющая скорости электрона, перпендикулярная вектору  $\mathbf{H}$ . Используя распределение Максвелла

$$dN(\mathbf{v}) = N_0 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

а также соотношения

$$v^2 = v_{\perp}^2 + v_z^2, \quad dv_x dv_y = v_{\perp} dv_{\perp} d\phi,$$

запишем число электронов в единице объема со скоростями в интервале от  $v_{\perp}$  до  $v_{\perp} + dv_{\perp}$  в следующем виде:

$$dN(v_{\perp}) = \frac{N_0 m}{kT} e^{-\frac{mv_{\perp}^2}{2kT}} v_{\perp} dv_{\perp},$$

где  $k$  — постоянная Больцмана, а  $T$  — температура электронного газа. Умножая эту величину на интенсивность (1) излучения отдель-

ного электрона, получим энергию излучения в единицу времени группы электронов, находящихся в единице объема со скоростями от  $v_{\perp}$  до  $v_{\perp} + dv_{\perp}$ . Полную интенсивность  $I$  излучения единицы объема электронного газа найдем путем интегрирования по поперечной скорости

$$I = \frac{N_0 e^4 H^2}{3mkTc^5} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m\xi}{2kT}} \xi d\xi = \frac{4N_0 e^4 H^2 kT}{3m^3 c^5}.$$

$$304. I = \frac{8e^4 E^2 \Psi_0^2}{3m^2 c^3} \cos^2 \left( \sqrt{\frac{2eE}{ml}} t \right).$$

305. Поместим начало координат в средней точке между диполями, а расстояние от диполей до точки наблюдения  $\mathbf{r}$  волновой зоны запишем как

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - a \frac{\mathbf{n} \mathbf{d}_0}{2d_0}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + a \frac{\mathbf{n} \mathbf{d}_0}{2d_0},$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  — единичный вектор, направленный от центра системы в точку наблюдения.

Напряженность магнитного поля излучения в волновой зоне равна сумме вкладов от каждого диполя в отдельности:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \left\{ \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega a (\mathbf{n} \mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega a (\mathbf{n} \mathbf{d}_0)}{2cd_0} \right] \right\} = \\ &= \frac{2\omega^2 (\mathbf{n} \times \mathbf{d}_0)}{c^2 r} \cos \frac{\omega a (\mathbf{n} \mathbf{d}_0)}{2cd_0} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

Средняя за период интенсивность излучения

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\omega^4 d_0^2}{c^3} \int_0^1 (1-x^2) \cos^2 \frac{\omega a x}{2c} dx = \\ &= 2d_0^2 \omega \lambda^{-3} \left[ \frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{a^2} \left( \frac{\lambda}{a} \sin \frac{a}{\lambda} - \cos \frac{a}{\lambda} \right) \right]. \end{aligned}$$

В предельном случае  $a \ll \lambda$  имеем  $I = \frac{4}{3} d_0^2 \omega \lambda^{-3}$ .

$$306. I = \frac{N^2 d_0^2 \omega^4}{3c^3} \exp \left( -\frac{t^2}{2T_0^2} \right), \quad \mathcal{E} = \frac{\sqrt{2\pi} N^2 d_0^2 \omega^4 T_0}{3c^3}.$$

$$307. \quad \mathcal{E} = \frac{2\pi e^2 \omega}{3c^3} (\omega^2 r_0^2 + v_0^2), \quad \omega^2 = \frac{4\pi \rho |e|}{3m}.$$

308. Используя уравнение Ньютона  $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$ , представим энергию  $\mathcal{E}_d$ , излученную за период  $T$ , в виде интеграла

$$\mathcal{E}_d = \frac{2Z^2e^6}{3m^2c^3} \int_0^T \frac{dt}{r^4}.$$

При помощи закона сохранения момента  $mr^2\dot{\psi} = M$  перейдем к интегрированию по полярному углу  $\psi$ , воспользовавшись уравнением траектории

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \psi,$$

где фокальный параметр и эксцентриситет известны:

$$p = \frac{M^2}{mZe^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{mZ^2e^4}}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{E}_d = \frac{2\pi Z^4 e^{10} m}{3M^5 c^3} \left( 3 + \frac{2\mathcal{E}M^2}{mZ^2e^4} \right).$$

309. В системе центра инерции в относительных координатах уравнение Ньютона и дипольный момент системы запишутся:

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e_1e_2\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{d} = \frac{e_1m_2 - e_2m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \equiv Q_{эфф}\mathbf{r}.$$

Здесь  $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$  — приведенная масса, а  $Q_{эфф}$  — эффективный заряд. Полные момент  $M$  и энергия  $\mathcal{E}$  системы заданы:

$$M = \mu lv_0, \quad \mathcal{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

Энергия  $\mathcal{E}_d$ , теряемая на дипольное излучение, выражается в виде интеграла

$$\mathcal{E}_d = \frac{2Q_{эфф}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^4} = \frac{4Q_{эфф}^2 e_1^2 e_2^2}{3\mu M c^3 p^2} \int_0^{\psi_m} (1 - \varepsilon \cos \psi)^2 d\psi,$$

где  $p$  — фокальный параметр,  $\varepsilon$  — эксцентриситет гиперболы, а  $\psi_m$  — максимальный угол отклонения от полярной оси, равные

$$p = \frac{M^2}{\mu e_1 e_2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{\mu l v_0^2}{e_1 e_2} \right)^2}, \quad \psi_m = \arccos \frac{1}{\varepsilon}.$$

После интегрирования находим

$$\mathcal{E}_d = \frac{4(e_1 e_2)^4}{3\mu^2 c^3 (v_0 l)^5} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \psi_m - \frac{3}{2} \varepsilon \sin \psi_m \right].$$

$$310. \mathcal{E}_d = \frac{4\pi e^2 a^2 m \mathcal{E}^2}{c^3 (M^2 + 2ma)^{3/2}}.$$

$$311. \kappa = \frac{8\pi e^2}{3m^2 v_0 c^3} \int_0^\infty dl \int_{r_0}^\infty dr \frac{l \left( \frac{dU}{dr} \right)^2}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_0^2}}},$$

где  $r_0 = r_0(l)$  — минимальное расстояние, на которое приближается к силовому центру частица, пролетающая с прицельным расстоянием  $l$ . Величина  $r_0$  является корнем уравнения

$$1 - \frac{l^2}{r_0^2} - \frac{2U(r_0)}{mv_0^2} = 0.$$

## § 2. Магнитно-дипольное и квадрупольное излучения

$$312. I = \frac{2\beta^4 H^4 \mu^2}{3c^3} \sin^2 \theta_0.$$

$$313. I = \frac{a^2 b^2 J_0^2 \omega^4}{3c^5}.$$

$$314. I = \frac{2l^2 \mu_l^2 \omega^4 \psi_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega t, \quad \omega = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{3\mu_l H}{m_l}}.$$

315. Дипольный момент  $\mathbf{d}$  заряженной системы должен удовлетворять условию  $\ddot{\mathbf{d}} \equiv 0$ .

$$316. I = \frac{e^4}{6m^2 c^5} [E^2 v^2 - (E\mathbf{v})^2].$$

$$317. I = \frac{Q^2 R^4 \omega_0^6 \psi_0^2}{75c^5}.$$

$$318. I = \frac{Q^2 \omega^2}{600c} \left( \frac{QHR}{mc^2} \right)^4 \sin^2 \theta.$$

$$319. I = \frac{8}{3c} \left( \frac{\pi^2 J^2 R^2 H \psi_0}{mc^3} \right)^2 \cos^2 \sqrt{\frac{2\pi JH}{mc}} t.$$

$$320. I = \sqrt{2\pi a} \frac{\alpha l^4 J_0^2}{c^5}.$$

$$321. I = \frac{50a^4 e^2}{3c^5} \dot{\psi}^6 (4\ddot{\psi}^2 + \dot{\psi}\ddot{\psi})^2.$$

322. Магнитно-дипольное излучение отсутствует в системе координат центра инерции. В других координатных системах магнитно-дипольное излучение имеется.

323. Если начало координат выбрано в центре инерции, то после перехода к относительным координатам магнитный момент двух заряженных частиц выражается через полный механический момент, который в случае замкнутой системы сохраняет постоянное значение. Поэтому производная по времени от магнитного момента обращается в нуль тождественно и магнитно-дипольное излучение отсутствует.

324. Магнитный момент системы пропорционален механическому. Согласно уравнению движения производная по времени от механического момента системы равна моменту внешних сил. Последний равен нулю, так как система замкнутая. Следовательно, производная по времени от механического и магнитного моментов обращается в нуль тождественно и магнитно-дипольное излучение отсутствует.

325. Магнитный момент  $\mu$  системы заряженных частиц выражается через полный механический момент  $M$  при помощи формулы

$$\mu = \frac{e}{2mc} M. \quad (1)$$

Во внешнем магнитном поле уравнение движения момента  $M$  имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = \mu \times H. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает

$$\frac{d\mu}{dt} = -(\Omega \times \mu), \quad \Omega = \frac{eH}{2mc},$$

т. е. вектор  $\mu$  вращается вокруг направления  $H$  с угловой скоростью  $-\Omega$ . Вращение вектора  $\mu$  приводит к магнитно-дипольному излучению с частотой  $\Omega = \frac{eH}{2mc}$ . Напряженности магнитного и электрического полей излучения в волновой зоне:

$$H_M = \frac{e^2 H^2}{4m^2 c^4 r} (n \times (\mu_{\perp} \times n)), \quad E_M = H_M \times n,$$

где  $n$  — единичный вектор, проведенный из центра системы в точку наблюдения, а  $\mu_{\perp}$  — составляющая магнитного момента, перпендикулярная вектору  $H$ .

$$326. I = \frac{4\mu_0^2 \omega^4}{3c^3} \cos^2 \frac{\Delta\omega t + \alpha}{2}.$$

### 327. Полный магнитный момент системы

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega + n\varepsilon)t = \\ &= \mu_0 \operatorname{Re} \left( e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varepsilon t} \right) = \mu_0 \operatorname{Re} \left( e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\varepsilon t}}{1 - e^{i\varepsilon t}} \right) = \\ &= \mu_0 \cos \left( \omega + \frac{N-1}{2} \varepsilon \right) t \frac{\sin \frac{N\varepsilon t}{2}}{\sin \frac{\varepsilon t}{2}}.\end{aligned}$$

Средняя по времени от  $t$  до  $t + 2\pi/\omega$  интенсивность излучения запишется

$$I = \frac{\mu_0^2 \omega^4}{3c^3} \frac{\sin^2 \frac{N\varepsilon t}{2}}{\sin^2 \frac{\varepsilon t}{2}}.$$

$$328. I = \frac{N^2 \mu_0^2 \omega^4}{3c^3} e^{-\frac{2|t|}{\tau}}; \quad \mathcal{E} = \frac{N^2 \mu_0^2 \omega^4 \tau}{3c^3}.$$

329. Интенсивность квадрупольного излучения не зависит от выбора начала координат, если выполнены условия

$$\ddot{Q} = 0, \quad \ddot{\mathbf{d}} = 0,$$

где  $Q$  и  $\mathbf{d}$  — полный заряд и дипольный момент излучающей системы.

330. Дипольное излучение отсутствует. Искомая интенсивность складывается из интенсивностей магнитно-дипольного и квадрупольного излучений системы двух зарядов.

Прежде всего решаем задачу о колебаниях шарика в предположении, что излученная энергия ничтожно мала по сравнению с его полной энергией. Выбрав начало координат в средней точке стержня и совместив плоскость  $XY$  с плоскостью колебаний (ось  $X$  параллельна силе тяжести), получаем для координат шарика следующие выражения:

$$x = l, \quad y = l\psi, \quad z = 0.$$

Здесь  $\psi$  — угол отклонения стержня от вертикального положения, который меняется по гармоническому закону  $\psi = \psi_0 \cos \omega t$ , где  $\omega = \sqrt{g/l}$ , а  $g$  — ускорение силы тяжести. При определении координат шарика сделано разложение в ряд по малому параметру  $\psi \ll 1$  и отброшены все старшие степени угла  $\psi$ , кроме первой.

Зная закон изменения координат шарика, находим зависимость координат обоих зарядов от времени. После этого интенсивность

магнитно-дипольного излучения вычисляется по общей формуле

$$I_{\mu} = \frac{e^2 l^4 \Psi_0^2 \omega^6}{3c^5}.$$

В выражении для тензора квадрупольного момента системы двух зарядов также следует отбросить старшие степени угла  $\psi$ , так как шарик совершает малые колебания:

$$D_{\alpha\beta} = 2el^2 \begin{pmatrix} 2 & 3\psi & 0 \\ 3\psi & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда средняя по времени интенсивность квадрупольного излучения принимает вид

$$I_D = \frac{e^2 l^4 \Psi_0^2 \omega^6}{5c^5}.$$

Полная интенсивность излучения обоих зарядов равна сумме интенсивностей магнитно-дипольного и квадрупольного излучений

$$I = \frac{8e^2 l^4 \Psi_0^2 \omega^6}{15c^5}.$$

$$331. I = \frac{(l - l_0)^2}{15c} \left( \frac{em_1 m_2 \omega^3}{m(m_1 + m_2)c^2} \right)^2 [4(l - l_0)^2 + l^2].$$

332. В системе центра инерции полный квадрупольный момент осколков ядра, разлетающихся вдоль оси  $X$ , имеет вид

$$D_{\alpha\beta} = \frac{eZA_1 A_2 x^2}{A(A_1 + A_2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где  $x$  — координата частицы с приведенной массой

$$\mu = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} m,$$

а  $m$  — масса нуклона. Используя уравнение Ньютона и закон сохранения энергии

$$\mu \ddot{x} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x^2}, \quad \frac{\mu \dot{x}^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{x} = \mathcal{E}_0,$$

нетрудно получить соотношение

$$\frac{d^3 x^2}{dt^3} = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{\mu} \frac{\dot{x}}{x^2}.$$



После этого задача о нахождении энергии излучения сводится к вычислению интеграла

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\dot{x}}{x^4} dx = \frac{16}{105} \left( \frac{2}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\mathcal{E}_0^{7/2}}{Z_1^3 Z_2^3 e^6},$$

где  $x_0$  — начальное расстояние между осколками (см. также решение задачи 297). Окончательно энергия квадрупольного излучения при разлете осколков ядра выражается формулой

$$\mathcal{E} = \frac{64}{1575} \left( \frac{A_1 + A_2}{2A_1 A_2} \right)^{1/2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^{5/2} \frac{\mathcal{E}_0}{A_1 A_2}.$$

333. Вычисляя третью производную по времени от тензора

$$D_{\alpha\beta} = e (3x_{\alpha} \dot{x}_{\beta} - r^2 \delta_{\alpha\beta})$$

квадрупольного момента заряда  $e$ , следует помнить, что ускорение

$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}$  протона постоянно. Поэтому

$$\ddot{D}_{\alpha\beta} = 3e (3\dot{x}_{\alpha} \ddot{x}_{\beta} + 3\ddot{x}_{\alpha} \dot{x}_{\beta} - 2\dot{\mathbf{r}} \ddot{\mathbf{r}} \delta_{\alpha\beta}).$$

Искомая сумма  $\ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\beta\alpha}$  вычисляется в общем виде, после чего ускорение протона выражается через  $\mathbf{E}$ . В результате интенсивность квадрупольного излучения протона запишется так:

$$I = \frac{3e^4}{10m^2 c^5} [(\mathbf{vE})^2 + 3v^2 E^2].$$

$$334. \quad \frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{32e^2 \omega^2 t}{5m^2 c^5} + \frac{1}{\mathcal{E}_0}.$$

$$335. \quad \psi = \pi \pm 4 \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{R\omega}{c},$$

$$I_d = \frac{4e^2 R^2 \omega^4}{3c^3} (1 + \cos \psi), \quad I_D = \frac{32e^2 R^4 \omega^6}{5c^5} \cos^2 \psi.$$

$$336. \quad I_d = \frac{2d^2 \omega^4}{3c^3}, \quad I_{\mu} = \frac{2R^2 d^2 \omega^6}{3c^5}, \quad I_D = \frac{32R^2 d^2 \omega^6}{5c^5}.$$

Указание. Точечный диполь с моментом  $\mathbf{d}$  следует рассматривать как предельный случай системы двух зарядов  $e$  и  $-e$ , расстояние  $l$  между которыми сокращается до нуля, а абсолютная величина зарядов возрастает до бесконечности так, что

$$\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} el = \mathbf{d}, \quad (1)$$

где вектор  $\mathbf{l}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

Поэтому магнитный момент, создаваемый вращающимся диполем, представляет собой предел следующей суммы:

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty}} \frac{e}{2c} \left[ \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{l}}{2} \right) \times \left( \dot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\mathbf{l}}}{2} \right) - \left( \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}}{2} \right) \times \left( \dot{\mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{l}}}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2c} [(\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{d}})] = -\frac{d\omega}{c} \mathbf{r},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор вращающегося диполя.

Тензор квадрупольного момента удобно определять сначала во вращающейся системе координат  $X'Y'Z'$ , ось  $Z'$  которой совпадает с осью вращения, а ось  $X'$  проходит через диполь параллельно его моменту  $\mathbf{d}$ . При этом диполь рассматривается как система двух зарядов  $e$  и  $-e$ , расположенных друг от друга на некотором фиксированном расстоянии  $l$ . После того, как тензор квадрупольного момента  $D'_{\alpha\beta}$  для фиксированной величины  $l$  во вращающейся координатной системе определен, следует осуществить предельный переход (1) в каждой компоненте этого тензора. В результате искомый тензор примет вид

$$D'_{\alpha\beta} = 2Rd \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Путем преобразования координат находят тензор квадрупольного момента  $D_{\alpha\beta}$  в покоящейся системе координат  $XYZ$ , ось  $Z$  которой совпадает с осью вращения, а начало — с центром окружности:

$$D_{\alpha\beta} = 2Rd \begin{pmatrix} 3 \cos^2 \omega t - 1 & 3 \sin \omega t \cos \omega t & 0 \\ 3 \sin \omega t \cos \omega t & 3 \sin^2 \omega t - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$337. I = \frac{128R^2 d^2 \omega^6}{5c^5}.$$

$$338. I = \frac{16a^2 d^2 \omega^6}{15c^5}.$$

$$339. I_{\mu} = \frac{a^2 d_0^2 \omega^6}{3c^5}, \quad I_D = \frac{a^2 d_0^2 \omega^6}{5c^5},$$

$$340. \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp \left( -\frac{8e^2 a^2 \omega^4 t}{15mc^5} \right).$$

341. Излучение отсутствует.

$$342. I = \frac{2Q^2 r_0^4 \omega^6 \varepsilon^2}{375c^5} \sin^2 \omega t.$$

$$343. I = \frac{Q^2 R^4 \omega^6}{10c^5}.$$

**344.** Прецессия однородно заряженного кольца приводит к квадрупольному излучению. Тензор  $D'_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента кольца легко вычисляется в штрихованной системе координат  $X'Y'Z'$ , жестко связанной с вращающимся кольцом (см. рис. 4). При этом недиагональные компоненты тензора  $D'_{\alpha\beta}$  обращаются в нуль, а диагональные принимают вид

$$D'_{11} = D'_{22} = \pi R^3 q, \quad D'_{33} = -2\pi R^3 q.$$

Матрица  $a_{\alpha\beta}$  преобразования координат  $x_\alpha = a_{\alpha\beta} x'_\beta$  от вращающейся к покоящейся координатной системе находится обычным путем:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

где введено обозначение  $\psi = \omega t$ . Тензор квадрупольного момента в покоящейся системе координат вычисляется по общей формуле

$$D_{\alpha\beta} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\gamma} D'_{\delta\gamma} = a_{\alpha\delta} D'_{\delta\gamma} a_{\gamma\beta}^T.$$

Окончательно интенсивность квадрупольного излучения принимает вид

$$I = \frac{\pi^2 q^2 R^6 \omega^6}{10c^5} (15 \sin^4 \theta + \sin^2 \theta).$$

$$345. \quad I = \frac{8Q^2 l^4 \omega^6}{45c^5}.$$

$$346. \quad I_\mu = \frac{Q^2 (a^2 + b^2)^2 \theta_0^2 \omega^6}{150c^5} \sin^2 \omega t,$$

$$I_D = \frac{Q^2 (a^2 - b^2)^2 \theta_0^2 \omega^6}{250c^5} \sin^2 \omega t.$$

**347.** Тензор квадрупольного момента диска:

$$D_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta,$$

$$D_{11} = \frac{Q}{4} (2a^2 - b^2), \quad D_{22} = \frac{Q}{4} (2b^2 - a^2), \quad D_{33} = -\frac{Q}{4} (a^2 + b^2),$$

где  $Q = \pi a b \sigma$  — полный заряд. При деформации диска полуоси  $a$  и  $b$  меняются со временем по закону

$$a = R [1 + \epsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1)], \quad b = R [1 + \epsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2)],$$

где величины  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  пропорциональны малому параметру  $\beta$  и поэтому также малы  $\epsilon_1 \ll 1$  и  $\epsilon_2 \ll 1$ . Согласно условию задачи площадь диска равна площади круга радиуса  $R$ , если отбросить слагаемые,

квадратичные по параметру  $\beta$ . Такое требование приводит к соотношению, которое должно выполняться тождественно при любом  $t$ :

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \varepsilon_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = 0.$$

Из этого тождества вытекают равенства  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$  и  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Аналогично, закон изменения параметра деформации приводит к тождеству

$$\varepsilon_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \equiv \beta \cos \omega t,$$

из которого получаем  $\varepsilon_1 = \beta$  и  $\alpha_1 = 0$ . Таким образом, диагональные компоненты тензора квадрупольного момента имеют вид

$$D_{11} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4} (1 + 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{22} = \frac{\pi R^4 \sigma}{4} (1 - 6\beta \cos \omega t),$$

$$D_{33} = -\frac{\pi R^4 \sigma}{2}.$$

Оставляя слагаемые с наименьшей степенью параметра  $\beta$ , находим интенсивность излучения в среднем по времени за период  $T$ :

$$I = \frac{\pi^2 R^3 \sigma^2 \omega^6 \beta^2}{80 c^5}.$$

$$348. I = \frac{a_0^{10} \rho^2 \omega^6 \beta^2}{540 c^5}.$$

349. Векторный потенциал (IV.11) в волновой зоне с учетом поправок порядка  $v_i^2/c^2$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6c^2 r} + \frac{1}{2c^3 r} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N e_i (n \mathbf{r}_i)^2 \mathbf{v}_i,$$

где радиус-вектор  $\mathbf{r}_i$   $i$ -го заряда, а также величины  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{v}_i$  берутся в момент времени  $t - r/c$ . Здесь обозначено

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{r}_i, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i, \quad D_{\alpha} = D_{\alpha\beta} n_{\beta},$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N e_i (3x_{i\alpha} x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Напряженность магнитного поля излучаемой волны

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}.$$

Вычисляя поток вектора Пойнтинга через сферу большого радиуса, находим интенсивность излучения с заданной точностью

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \\ + \frac{1}{4\pi c^5} \int (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^N e_i (nr_i)^2 (\mathbf{v}_i \times \mathbf{n}) d\Omega.$$

Последнее слагаемое представляет собой искомую величину  $\Delta I$ , которая после интегрирования по углам принимает вид

$$\Delta I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}}{15c^5} \frac{d^3}{dt^3} \sum_{i=1}^N e_i [2r_i^2 \mathbf{v}_i - (\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i) \mathbf{r}_i].$$

350. Поскольку магнитно-дипольное излучение отсутствует, интенсивность излучения заряда  $e$  с учетом членов порядка  $v^2/c^2$  представляется в виде суммы трех слагаемых

$$I = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \Delta I.$$

Величина  $\Delta I$  определена в предыдущей задаче:

$$\Delta I = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}}{15c^5} \frac{d^3}{dt^3} [2r^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r} \mathbf{v}) \mathbf{r}] = \\ = \frac{2e^2}{5c^5} [3v^2 \dot{\mathbf{v}}^2 + (\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}})^2 + 2(\mathbf{r} \dot{\mathbf{v}}) \dot{\mathbf{v}}^2] = \frac{4e^2 E^2}{5m^2 c^5} \left( 2v^2 + \frac{e(\mathbf{r} \mathbf{E})}{m} \right),$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$  — радиус-вектор, скорость и ускорение заряда.

Интенсивность квадрупольного излучения как функция скорости заряда найдена в задаче 333:

$$\frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} = \frac{6e^4 E^2 v^2}{5m^2 c^5}.$$

Ускорение, входящее в формулу интенсивности дипольного излучения, должно быть вычислено с учетом релятивистских поправок порядка  $v^2/c^2$ . Для этого воспользуемся уравнением движения  $\frac{d}{dt} \mathbf{p} = e\mathbf{E}$  и формулами

$$\mathbf{p} = \frac{v\mathcal{E}}{c^2}, \quad \mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{E} = evE,$$

справедливыми для быстрой частицы. Эти соотношения позволяют выразить ускорение через скорость. Разлагая найденное ускорение в

ряд по малому параметру  $v^2/c^2$  и ограничиваясь лишь первой релятивистской поправкой, получаем

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{e^2 E^2}{m^2} \left( 1 - 3 \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Суммируя отдельные слагаемые, находим окончательно

$$I = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3} \left( 1 + \frac{6v^2}{5c^2} + \frac{6e(\mathbf{rE})}{5mc^2} \right). \quad (1)$$

Пусть при  $t = 0$  имеем  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$ . Тогда в произвольный момент времени  $t$  имеем

$$\frac{e(\mathbf{rE})}{mc^2} = \frac{v^2}{2c^2},$$

и полученная поправка к интенсивности излучения пропорциональна  $v^2/c^2$ .

Как отмечалось во введении к главе IV, рассматриваемая здесь интенсивность излучения зависит от выбора начала координат внутри излучающей системы. В частности, в момент времени, когда заряженная частица находится в начале координат, найденная интенсивность излучения (1) численно совпадает с интенсивностью излучения релятивистской частицы (V.59), если принять  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$  и учесть поправку порядка  $v^2/c^2$  (см. задачу 449). Это обстоятельство связано с тем, что в данный момент времени величина (IV.16) численно совпадает с интенсивностью излучения (V.59) релятивистской заряженной частицы, а поток вектора Пойнтинга вычисляется через одну и ту же сферу большого радиуса в обоих указанных случаях.

### § 3. Спектральное разложение излучения

351. Вторая производная по времени от дипольного момента электрона

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Компонента Фурье этой функции имеет вид

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \left( \frac{\alpha + i(\omega + \omega_0)}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha + i(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} \right).$$

Для энергии, излученной на частотах в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , получаем следующее выражение:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^2 + \alpha^2}{[(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2][(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]} d\omega.$$

$$352. d\mathcal{E}_\omega = \frac{2J_0^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^2}{[(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2][(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2]} d\omega.$$

$$353. d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} d\omega, \text{ где обозначено}$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi\rho |e|}{3m}, \quad \gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3} \quad (\gamma \ll \omega_0).$$

354. Уравнение движения осциллятора с учетом силы радиационного трения

$$\ddot{\mathbf{r}} - \frac{2e^2}{3mc^3} \dddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(t) \quad (1)$$

определено в бесконечном промежутке времени  $-\infty \leq t \leq \infty$ . В области  $t \leq 0$  правая и левая части этого уравнения равны нулю тождественно.

Разложим в интеграл Фурье обе части уравнения (1) и воспользуемся соотношениями между компонентами Фурье

$$\ddot{\mathbf{r}}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{r}(\omega), \quad \dddot{\mathbf{r}}(\omega) = i\omega^3 \mathbf{r}(\omega).$$

Полученное алгебраическое уравнение решаем относительно величины  $\mathbf{r}(\omega)$ :

$$\mathbf{r}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{E}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

где  $\gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}$ , а функция  $\mathbf{E}(\omega)$  известна:

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_0^\infty \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt.$$

Согласно формулам (IV.20) и  $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -e\omega^2 \mathbf{r}(\omega)$  энергия дипольного излучения, приходящаяся на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , принимает вид

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4 |\mathbf{E}(\omega)|^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} d\omega.$$

$$355. \Delta\omega = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}.$$

356. В волновой зоне вектор Пойнтинга можно выразить через напряженность электрического поля  $\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2 \mathbf{n}$ . Полная энергия, прошедшая через единичную площадку, расположенную в точке

наблюдения перпендикулярно распространению волны, определяется выражением

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi} \int_0^{\infty} E^2 dt = \frac{c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega,$$

где

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{cE_0^2}{16\pi^2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2}.$$

Величина  $\mathcal{E}(\omega)$  описывает спектральный состав прошедшего электромагнитного импульса. Графическое изображение функции  $\mathcal{E}(\omega)$  дает контур спектральной линии. Полушириной  $\Delta\omega/2$  спектральной линии называется такое значение разности  $\omega - \omega_0$ , при котором функция  $\mathcal{E}(\omega)$  убывает в два раза по сравнению со своим максимальным значением, откуда находим для ширины  $\Delta\omega$  спектральной линии следующее значение:  $\Delta\omega = 2\alpha$ .

$$357. \Delta\omega = \frac{2}{\tau \sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

$$358. \Delta\omega = \frac{\sqrt{2} \ln 2}{T_0}.$$

$$359. d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^4 E^2}{3\pi m^2 c^3 \omega^2} \sin^2 \left( \omega \sqrt{\frac{ml}{2eE}} \right) d\omega.$$

$$360. d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^4 E^2}{3\pi m^2 c^3 \omega^2} \sin^2 \frac{\omega m v_0 \cos \alpha}{eE} d\omega.$$

361. Время  $\tau$  взаимодействия протона с ядром по порядку величины равно  $l/v_0$ . Энергия, излученная на малых частотах  $\omega\tau \ll 1$ , описывается формулой

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^2 (v_2 - v_1)^2}{3\pi c^3} d\omega,$$

в которой  $v_1$  и  $v_2$  — скорости протона до и после рассеяния на ядре. Излученная энергия пренебрежимо мала по сравнению с полной энергией протона. Поэтому кинетическая энергия протона после рассеяния остается прежней. Скорость протона в процесс рассеяния поворачивается на малый угол  $\theta \ll 1$ , не меняясь по абсолютной величине. Это обстоятельство позволяет вычислить угол рассеяния  $\theta$  следующим образом. Выберем ось  $X$  по направлению скорости  $v_1$  налетающего протона, а плоскость  $XY$  совместим с плоскостью рассеяния. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{2y}}{v_{2x}}.$$

В случае рассеяния на малые углы можно приближенно написать  $\operatorname{tg} \theta = \theta$  и  $v_{2x} = v_2 = v_0$ . Поперечную составляющую скорости после



рассеяния найдем путем интегрирования уравнения Ньютона  $m\dot{v}_y = F_y$ . Учитывая прямолинейный характер траектории, получаем

$$v_{2y} = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt = \frac{lZe^2}{mv_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{2Ze^2}{mv_0 l}.$$

Треугольник, построенный на векторах  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , является равнобедренным с малым углом  $\theta$  при вершине. Это позволяет вычислить модуль разности этих скоростей по формуле

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = v_0 \theta.$$

Собирая полученные результаты, имеем окончательно

$$dN_\omega = \frac{d\mathcal{E}_\omega}{\hbar\omega} = \frac{8}{3\pi\hbar\omega c^3} \left( \frac{Ze^3}{mv_0 l} \right)^2 d\omega.$$

**362.** Перейдем в систему центра инерции и направим ось  $X$  на встречу частице с приведенной массой  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , летящей из бесконечности к центру кулоновского поля отталкивания. Движение описывается уравнением Ньютона

$$\mu \ddot{x} = \frac{e_1 e_2}{x^2}$$

с дополнительными условиями  $x(0) = l$  и  $\dot{x}(0) = 0$  при  $t = 0$ .

В задачу об излучении входит вторая производная от дипольного момента  $\mathbf{d} = l_x \mathbf{d}$ , определяемая выражением

$$\ddot{\mathbf{d}} = \mu \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \ddot{x} = \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \frac{e_1 e_2}{x^2}.$$

Компонента Фурье  $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$  этой функции выражается через интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dt}{x^2}.$$

Для его вычисления перейдем к новой переменной интегрирования, которая обычно используется в задачах о движении в кулоновском поле отталкивания

$$t = \frac{1}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi), \quad x = l \text{ch}^2 \frac{\xi}{2},$$

где  $\omega_0$  — характерная частота

$$\omega_0 = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{2e_1 e_2 (m_1 + m_2)}{l m_1 m_2}}.$$

В результате компонента Фурье запишется:

$$\ddot{d}(\omega) = \frac{4e_1e_2}{\omega_0 l^2} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) F(\omega),$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi)} \frac{d\xi}{1 + \text{ch } \xi}.$$

Последний интеграл возьмем по частям, после чего сделаем замену переменной интегрирования  $\xi = i\pi + \eta$  и воспользуемся известной формулой для производной от функции Ганкеля первого рода порядка  $p$  по ее аргументу  $z$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z \text{ sh } \eta} \text{sh } \eta \, d\eta = -i\pi H_p^{(1)'}(z).$$

Тогда функция  $F(\omega)$  примет вид

$$F(\omega) = \frac{\pi\omega}{\omega_0} e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}} H_{i \frac{\omega}{\omega_0}}^{(1)'} \left( i \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

Энергия, излученная в виде волн с частотами в интервале  $d\omega$ , описывается формулой

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi l c^3 (m_1 + m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 |F(\omega)|^2 d\omega.$$

В случае малых частот  $\omega \ll \omega_0$  асимптотическое выражение для функции Ганкеля и ее производной берем из справочника [9]

$$H_0^{(1)'} \left( i \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{2\omega_0}{\pi\omega},$$

а энергия, излученная на малых частотах, принимает вид

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{16e_1e_2m_1m_2}{3\pi l c^3 (m_1 + m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 d\omega.$$

В области больших частот  $\omega \gg \omega_0$  воспользуемся формулой из книги [1]

$$H_{i\nu}^{(1)'}(i\nu) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left( \frac{6}{\nu} \right)^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \quad \text{при } \nu \gg 1,$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма функция аргумента  $z = 2/3$ . Следовательно, спектральная плотность излучения убывает на больших частотах в основном по экспоненциальному закону

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{9\pi l c^3 (m_1 + m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left[ 6^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \right]^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2/3} e^{-\frac{2\pi\omega}{\omega_0}} d\omega.$$

**363.** Следуя методу решения предыдущей задачи, находим спектральный состав излучения

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi l c^3(m_1+m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 |f(\omega)|^2 d\omega,$$

где введено обозначение

$$f(\omega) = \int_0^\infty e^{i \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi)} \frac{d\xi}{1 + \text{ch } \xi}. \quad (1)$$

При  $\omega \ll \omega_0$  функцию  $f(\omega)$  можно заменить единицей. Спектральная плотность излучения на малых частотах в четыре раза меньше, чем в предыдущей задаче

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4e_1e_2m_1m_2}{3\pi l c^3(m_1+m_2)} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 d\omega.$$

В области больших частот  $\omega \gg \omega_0$  интеграл (1) берем по частям так, чтобы появляющиеся слагаемые содержали бы частоту  $\omega$  в знаменателе. Оставшийся интеграл опять берем по частям, увеличивая степень  $\omega$  в знаменателе последующих слагаемых. Продолжая этот процесс неограниченно, получим бесконечный ряд по параметру  $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$ . При больших частотах достаточно ограничиться первым членом этого асимптотического ряда

$$f(\omega) = i \frac{\omega_0}{4\omega}.$$

В отличие от результата предыдущей задачи спектральная плотность излучения убывает на больших частотах по степенному закону

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e_1^2e_2^2}{3\pi l^4 c^3} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{d\omega}{\omega^2}.$$

**364.** Предположим, что нулевой момент времени  $t = 0$  отвечает точке остановки сталкивающихся частиц. Тогда в системе центра инерции вторая производная от дипольного момента заряженных частиц является четной функцией времени  $t$  при лобовом столкновении и последующем разлете. В интервале времени  $-\infty \leq t \leq 0$  (или  $0 \leq t \leq \infty$ ) дипольные моменты в случаях *a* и *б* совпадают между собой тождественно, так что

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(t) = 1G(t) \quad \text{при} \quad -\infty \leq t \leq \infty, \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(t) = 1G(t) \quad \text{при} \quad -\infty \leq t \leq 0 \\ \text{(или } 0 \leq t \leq \infty), \quad (2)$$

где  $\mathbf{l}$  — постоянный единичный вектор, а  $G(t)$  — некоторая четная функция времени  $t$ . Это обстоятельство позволяет написать

$$\ddot{\mathbf{d}}^a(\omega) = \mathbf{l} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt = \mathbf{l} 2 \int_{-\infty}^0 G(t) \cos \omega t dt = \mathbf{l} 2 \operatorname{Re} f(\omega), \quad (3)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega) = \mathbf{l} \int_{-\infty}^0 G(t) e^{i\omega t} dt = \mathbf{l} f(\omega), \quad (4)$$

где  $f(\omega) = \int_{-\infty}^0 G(t) e^{i\omega t} dt$ .

Интегрируя по времени интенсивность дипольного излучения с учетом соотношений (1) и (2), приходим к выводу, что полные энергии излучения в случаях  $a$  и  $b$  связаны равенством  $\mathcal{E}^a = 2\mathcal{E}^b$ . С другой стороны, полные энергии можно представить в виде спектрального разложения, что дает

$$\int_0^{\infty} |\ddot{\mathbf{d}}^a(t)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\ddot{\mathbf{d}}^b(\omega)|^2 d\omega.$$

Это соотношение при помощи формул (3) и (4) приводится к виду

$$2 \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2 d\omega = \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega.$$

Полученное равенство можно также доказать иначе. Для этого рассмотрим отдельно интеграл

$$2 \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^0 dt \int_{-\infty}^0 dt' G(t) G(t') \cos \omega t \cos \omega t'.$$

Воспользуемся известными соотношениями

$$2 \cos \omega t \cos \omega t' = \cos \omega(t - t') + \cos \omega(t + t'),$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega$$

и представим этот интеграл так:

$$2 \int_0^{\infty} (\operatorname{Re} f(\omega))^2 d\omega = \pi \int_0^{\infty} G(t) G(t') [\delta(t - t') + \delta(t + t')] dt dt'.$$

Слагаемое подынтегрального выражения, содержащее  $\delta$ -функцию  $\delta(t+t')$ , не дает вклада, поэтому правая часть последнего равенства запишется как

$$\pi \int_0^{\infty} G^2(t) dt = \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2 d\omega.$$

$$365. \quad I = \frac{4\omega_0^4}{3c^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |d_n|^2, \quad d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} d e^{in\omega_0 t} dt.$$

$$366. \quad d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2\mu_0^2 T^2 \omega^4}{3c^3} e^{-\frac{\omega^2 T^2}{2}} d\omega.$$

$$367. \quad d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2\pi J_0^2 S^2 \tau^2}{3c^5} \omega^4 e^{-2\omega\tau} d\omega.$$

У к а з а н и е. Найти магнитный момент  $\mu(t)$  тока, а затем воспользоваться соотношением между компонентами Фурье  $\ddot{\mu}(\omega) = -\omega^2 \mu(\omega)$  и табличным интегралом

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{при } a > 0.$$

$$368. \quad d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{2a^2 d_0^2 \omega_0^6}{15\pi c^5} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega.$$

$$369. \quad d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{4a^2 d_0^2 \omega_0^6}{15\pi c^5} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega.$$

370. Тензор квадрупольного момента в системе центра инерции осколков ядра

$$D_{\alpha\beta} = \frac{eZA_1A_2x^2}{A(A_1+A_2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где движение происходит вдоль оси  $X$ . При помощи уравнения движения и закона сохранения энергии доказываем равенство

$$\frac{d^3}{dt^3} x^2 = \frac{2e^2 Z_1 Z_2 (A_1 + A_2)}{mA_1 A_2} \frac{\dot{x}}{x^2},$$

которое позволяет упростить формулу для искомой компоненты Фурье

$$\ddot{D}_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{2e^2 Z_1 Z_2}{mA} T_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dx}{x^2},$$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену переменной интегрирования

$$t = \frac{1}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi), \quad x = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{\mathcal{E}_0} \text{ch}^2 \frac{\xi}{2},$$

где  $\omega_0$  — характерная частота

$$\omega_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{e^2 Z_1 Z_2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0 (A_1 + A_2)}{m A_1 A_2}}.$$

Тогда получим следующее:

$$\ddot{D}_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{4eZ\mathcal{E}_0}{mA} T_{\alpha\beta} F(\omega),$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi)} \frac{\text{sh } \xi d\xi}{(1 + \text{ch } \xi)^2}.$$

Последний интеграл возьмем по частям, а затем сделаем замену переменной интегрирования  $\xi = i\pi + \eta$  и воспользуемся формулой для функции Ганкеля первого рода порядка  $p$  и аргумента  $z$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z \text{sh } \eta} d\eta = i\pi H_p^{(1)}(z). \quad (1)$$

Такое преобразование представит окончательный результат в удобном виде для исследования излучения на малых и больших частотах

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8Z^2 e^2}{15\pi c A^2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 |F(\omega)|^2 d\omega,$$

$$F(\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_0} e^{-\frac{\pi\omega}{\omega_0}} H_i^{(1)} \left( i \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

На малых частотах  $\frac{\omega}{\omega_0} = |p| = |z| \ll 1$  существенная область интегрирования в (1) содержит  $\eta \gg 1$ , поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\eta - z \text{sh } \eta} d\eta \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\omega}{\omega_0} \text{sh } \eta} d\eta = H_0^{(1)} \left( i \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

Кроме того, из справочника [9] выписываем  $iH_0^{(1)} \left( i \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2\omega_0}{\gamma\omega}$  при  $\omega \ll \omega_0$ , где  $\gamma = e^C = 1,781 \dots$ , а  $C$  — постоянная Эйлера. Таким образом, в области малых частот  $\omega \ll \omega_0$  имеем

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{32Z^2 e^2}{15\pi c A^2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \ln \frac{2\omega_0}{\gamma\omega} \right)^2 d\omega.$$

Для большого чисто мнимого аргумента асимптотика функции Ганкеля приведена в книге [1]:

$$iH_{iv}^{(1)}(iv) = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \left(\frac{6}{v}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{при } v \gg 1,$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция аргумента  $z = 1/3$ . Это позволяет найти спектральный состав излучения для больших частот  $\omega \gg \omega_0$ :

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8Z^2e^2}{45\pi cA^2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \left[6^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/3} e^{-\frac{2\pi\omega}{\omega_0}} d\omega.$$

371. По аналогии с предыдущей задачей получаем спектральный состав излучения при разлете осколков ядра

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_\omega &= \frac{8Z^2e^2}{15\pi cA^2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 |f(\omega)|^2 d\omega, \\ f(\omega) &= \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{\omega_0}(\xi + \text{sh } \xi)} \frac{\text{sh } \xi d\xi}{(1 + \text{ch } \xi)^2}, \\ \omega_0 &= \frac{2\mathcal{E}_\eta}{e^2Z_1Z_2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0(A_1 + A_2)}{mA_1A_2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В области малых частот  $\omega \ll \omega_0$  функцию  $f(\omega)$  можно заменить числом  $1/2$ , тогда

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2Z^2e^2}{15\pi cA^2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 d\omega.$$

Видно, что спектральная плотность излучения на малых частотах существенно отличается от результата предыдущей задачи.

В случае больших частот  $\omega \gg \omega_0$  интеграл (1) следует брать по частям так, чтобы появляющиеся слагаемые содержали частоту  $\omega$  в знаменателе. Повторяя эту процедуру, получим асимптотический ряд по параметру  $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$ . Ограничиваясь первым членом этого ряда, находим

$$f(\omega) = -\frac{1}{2^4} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Следовательно, спектральная плотность излучения при разлете осколков ядра убывает на больших частотах  $\omega \gg \omega_0$  значительно медленнее, чем в предыдущей задаче о лобовом столкновении и последующем разлете ядер,

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{Z^2e^2}{480\pi cA^2} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 d\omega.$$

372. У к а з а н и е. Доказательство аналогично решению задачи 364.

373.  $d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^2v^2R^2}{3\pi c^3(R^2 + h^2)} d\omega$ . Область применимости формулы ограничена условием малости величины  $\hbar\omega$  по сравнению с кинетической энергией частицы, чтобы исключить квантовые эффекты в излучении.

374.  $d\kappa_\omega = \frac{4e^2v^2R^2}{3c^3} d\omega$ . Область применимости формулы ограничена тем же условием, что и в предыдущей задаче.

#### § 4. Угловое распределение излучения

375. Интенсивность (IV.22) дипольного излучения в элемент  $d\Omega$  телесного угла выражается через напряженность  $\mathbf{H}$  магнитного поля излучаемой волны. В свою очередь вектор  $\mathbf{H}$  зависит от ускорения  $\ddot{\mathbf{r}}_e$  частицы согласно формуле

$$\mathbf{H} = \frac{e(\ddot{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{n})}{c^2 r},$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , а  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Ускорение частицы определяется из уравнения Ньютона:

$$\ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) = -\frac{evH_0}{mc} \mathbf{n}',$$

где

$$\mathbf{n}' = \mathbf{i}_x \cos \frac{eH_0 t}{mc} + \mathbf{i}_y \sin \frac{eH_0 t}{mc}.$$

Здесь  $\mathbf{n}'$  — единичный вектор, направленный по радиус-вектору  $\mathbf{r}_e$  частицы. Интенсивность  $dI(t)$  дипольного излучения в телесный угол  $d\Omega$  в момент времени  $t$

$$dI(t) = \frac{e^4 v^2 H_0^2}{4\pi m^2 c^5} [1 - (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2] d\Omega.$$

Скалярное произведение  $\mathbf{n}\mathbf{n}'$  выражается через полярные углы  $\theta$  и  $\psi$  точки наблюдения следующим образом:

$$\mathbf{n}\mathbf{n}' = \sin \theta \cos \left( \frac{eH_0 t}{mc} - \psi \right).$$

После усреднения по времени за период движения частицы интенсивность  $dI$  излучения в телесный угол  $d\Omega$  запишется так:

$$dI = \frac{e^4 v^2 H_0^2}{8\pi m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

376.  $dI = \frac{J^2 S^2 \omega^4}{8\pi c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega$ . Здесь ось  $Z$  выбрана вдоль вектора  $\omega$ .



377.  $d\mathcal{E}_n = \frac{e^2}{15\pi R} \left( \frac{2Ze^2}{Rmc^2} \right)^{1/2} \sin^2 \theta d\Omega$ , где ось  $Z$  выбрана вдоль прямолинейной траектории протона.

378.  $dI = \frac{25}{10368} \frac{Q^2 R_0^4 \omega^6 \varepsilon^2}{\pi c^5} \sin^2 2\theta d\Omega$ . Начало координат помещено в средней точке цилиндра, а ось  $Z$  направлена по его оси.

У к а з а н и е. См. решение задачи 347.

379. Начало покоящейся декартовой системы координат поместим в средней точке цилиндра, а ось  $Z$  выберем вдоль вектора угловой скорости. Связанная с цилиндром штрихованная координатная система  $X'Y'Z'$  вращается около оси  $Z'$  ( $Z' \equiv Z$ ), причем ось  $X'$  совпадает с осью цилиндра. Тензор квадрупольного момента заряженного цилиндра в штрихованной системе координат находится легко:

$$D'_{\alpha\beta} = D \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{Q}{4} \left( \frac{\hbar^2}{3} - R^2 \right).$$

Путем преобразования координат определяем тензор  $D_{\alpha\beta}$  квадрупольного момента вращающегося цилиндра. Третья производная от этого тензора

$$\ddot{D}_{\alpha\beta} = -12D\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напряженность магнитного поля излучаемой волны в точке наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t' = t - r/c$  дается формулой

$$\mathbf{H} = \frac{2D\omega^3}{c^3 r} \sin \theta (\mathbf{l} \times \mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_x \sin(2\omega t' - \psi) - \mathbf{l}_y \cos(2\omega t' - \psi)$ ,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Здесь  $\theta$  и  $\psi$  — полярные углы точки наблюдения, а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, указывающий направление распространения волны. Используя среднее значение величины  $(\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2$  за период вращения

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 dt' = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$

находим угловое распределение интенсивности излучения

$$dI = \frac{Q^2 \omega^6}{32\pi c^5} \left( \frac{\hbar^2}{3} - R^2 \right)^2 (1 - \cos^4 \theta) d\Omega.$$

$$380. dI = \frac{2e^2 I^4 \omega^6}{\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta) d\Omega.$$

381. Энергия, излученная в телесный угол  $d\Omega$  на частотах от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ , может быть представлена в виде

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} [(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \times \mathbf{n}]^2 d\Omega d\omega,$$

где  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  — скорости частицы до и после столкновения с шаром. Поскольку энергия излучения весьма мала по сравнению с кинетической энергией частицы, скорость частицы по абсолютной величине не меняется при столкновении  $v = v'$ . Из геометрических соображений нетрудно определить угловую зависимость излученной энергии

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \left(1 - \frac{l^2}{R^2}\right) \left[ \sin^2 \theta + \frac{l^2}{R^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) + \right. \\ \left. + \frac{l}{R} \sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}} \sin 2\theta \cos \psi \right] d\Omega d\omega.$$

$$382. d\mathcal{E}_{n\omega} = \frac{D_0^2 T^2 \omega^2 \sin^2 2\theta}{256\pi c^5} e^{-\frac{\omega^2 T^2}{2}} d\Omega d\omega.$$

383.  $d\mathcal{E}_n = \frac{Q^2 v^3}{15\pi R c^3} \left(1 + \frac{5v}{8c} \cos \theta\right) \sin^2 \theta d\Omega$ , где  $\theta$  — угол между скоростью  $\mathbf{v}$  и направлением на точку наблюдения.

384. Угловое распределение полной энергии излучения описывается формулой (IV. 26), в которой

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r},$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{z}}\mathbf{l}_z, \quad \ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n} = 6e(3\dot{z}\ddot{z} + z\ddot{z})n_z(\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}).$$

В этих выражениях полярная ось  $Z$  направлена параллельно скорости движения частицы, а координата  $z$  и ее производные по времени имеют вид

$$z(t) = \frac{eE}{2m} t^2 + v_0 t \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ \dot{z}(t) = \begin{cases} v_0 & \text{при } t \leq 0, \\ \frac{eE}{m} t + v_0 & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{eE}{m} \tau + v_0 & \text{при } t \geq \tau, \end{cases} \\ \ddot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{eE}{m} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t > \tau, \end{cases} \\ \ddot{\ddot{z}}(t) = \frac{eE}{m} [\delta(t) - \delta(t - \tau)],$$

где  $\tau$  — время движения во внешнем электрическом поле.

После возведения в квадрат напряженности магнитного поля излучения

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c^2 r} \left[ \ddot{\mathbf{z}} + \frac{1}{c} (3\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}}) n_z \right] (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}),$$

кроме дипольного слагаемого, оставляем интерференционный член, имеющий порядок  $v/c$ ,

$$H^2 = \frac{e^2}{c^4 r^2} \left[ \ddot{\mathbf{z}}^2 + \frac{2}{c} \ddot{\mathbf{z}} (3\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}}) n_z \right] (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n})^2.$$

При интегрировании по времени в формуле (IV.26) примем во внимание свойство (ПЗ.13)  $\delta$ -функции. Окончательно

$$d\mathcal{E}_n = \frac{e^3 E (v - v_0)}{4\pi m c^3} \left( 1 + \frac{5(v + v_0)}{2c} \cos \theta \right) \sin^2 \theta d\Omega,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2leE}{m}}.$$

385. Напряженность магнитного поля излучения вычисляем с учетом малого слагаемого, линейного по скорости  $v$  движения протона,

$$\mathbf{H} = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\ddot{\mathbf{D}} \times \mathbf{n}}{6c^3 r} = \frac{e}{c^2 r} \left[ \ddot{\mathbf{z}} + \frac{1}{c} (3\dot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}} + \ddot{\mathbf{z}}\ddot{\mathbf{z}}) n_z \right] (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}),$$

где полярная ось выбрана вдоль направления движения протона, а координата  $z$  и ее производные по времени имеют вид

$$z(t) = \frac{eE}{2m} (t + t_0)^2 \quad \text{при} \quad -t_0 \leq t \leq t_0,$$

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leq -t_0, \\ \frac{eE}{m} (t + t_0) & \text{при} \quad -t_0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{eE}{m} 2t_0 & \text{при} \quad t \geq t_0, \end{cases}$$

$$\ddot{z}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < -t_0, \\ \frac{eE}{m} & \text{при} \quad -t_0 \leq t \leq t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t > t_0, \end{cases}$$

$$\ddot{\ddot{z}}(t) = \frac{eE}{m} [\delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)].$$

Начало отсчета времени ведется от момента прохождения протоном средней точки траектории во внешнем поле, так что  $2t_0$  — время движения в этом поле.

Компонента Фурье напряженности магнитного поля излучения

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e^2 E}{mc^2 r} \left[ \left( 1 + \frac{3v}{2c} n_z \right) \frac{2 \sin \omega t_0}{\omega} - \frac{l}{c} n_z \cos \omega t_0 - \right. \\ \left. - i \frac{3v n_z}{c \omega^2 t_0} (\omega t_0 \cos \omega t_0 - \sin \omega t_0) \right] (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}).$$

Сохраняя слагаемые порядка  $v/c$ , получаем окончательно

$$d\mathcal{E}_{n\omega} = \\ = \frac{e^4 E^2}{2\pi^2 m^2 c^3} \left[ \left( 1 + \frac{3v}{c} \cos \theta \right) \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega^2} - \frac{v\tau}{2c} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \cos \theta \right] \sin^2 \theta d\Omega,$$

где  $\tau = 2t_0 = \sqrt{\frac{2ml}{eE}}$  — время пролета через внешнее электрическое поле, а  $v = \sqrt{\frac{2eEl}{m}}$  — скорость протона при выходе из этого поля.

Интегрирование полученного выражения по частоте  $\omega$  дает угловое распределение полной энергии излучения с учетом слагаемого порядка  $v/c$ :

$$d\mathcal{E}_n = \frac{e^3 E v}{4\pi m c^3} \left( 1 + \frac{5v}{2c} \cos \theta \right) \sin^2 \theta d\Omega.$$

**386.** Магнитный момент и тензор квадрупольного момента системы из двух диполей определяются выражениями

$$\mu = \frac{ad}{c} \mathbf{l}_z, \quad D_{\alpha\beta} = 6ad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{1}{6} \ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta = ad_0 \omega^3 \sin \omega t \cdot N_\alpha,$$

где  $n_1 = \sin \theta \cos \psi$ ,  $n_2 = \sin \theta \sin \psi$ ,  $n_3 = \cos \theta$ ,  $N_1 = \sin \theta \sin \psi$ ,  $N_2 = \sin \theta \cos \psi$ ,  $N_3 = 0$ . Тогда напряженность магнитного поля излучаемой волны на большом расстоянии  $r$  от диполей примет вид

$$\mathbf{H} = \frac{ad_0 \omega^3}{c^3 r} [(\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{N} \times \mathbf{n})] \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Слагаемое  $r/c$  учитывает запаздывание электромагнитного сигнала. Зная величину  $\mathbf{H}$ , нетрудно вычислить поток электромагнитной энергии через элемент  $dS = r^2 d\Omega$  сферической поверхности радиуса  $r$ , видимый из центра заряженной системы под телесным углом  $d\Omega$ . После этого средняя по времени за период  $T = 2\pi/\omega$  интенсивность излучения в телесный угол  $d\Omega$  запишется так:

$$dI = \frac{a^2 d_0^2 \omega^6}{2\pi c^5} \sin^2 \theta \cos^2 \psi (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \psi) d\Omega.$$

387. Тем же методом, который изложен в указании к задаче 336, определяем магнитный момент и тензор квадрупольного момента вращающихся диполей

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{R d\omega}{c} \mathbf{m}, \quad D_{\alpha\beta} = 6Rd \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \omega t \\ 0 & 0 & \sin \omega t \\ \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{m} = I_x \cos \omega t + I_y \sin \omega t$ . Начало декартовой системы координат выбрано в центре окружности, а ось  $Z$  служит осью вращения.

Согласно формуле (IV. 14) напряженность магнитного поля в данной задаче выражается через векторы

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{dR\omega^3}{c} \mathbf{m}, \quad \ddot{\mathbf{D}} = 6R d\omega^3 \mathbf{N},$$

$$\mathbf{N} = \cos \theta (I_x \sin \omega t' - I_y \cos \omega t') + I_z \sin \theta \sin (\omega t' - \psi),$$

а переменные величины берутся в запаздывающий момент времени  $t' = t - r/c$ . Введенные обозначения позволяют упростить выражение для напряженности магнитного поля в волновой зоне

$$\mathbf{H} = \frac{R d\omega^3}{c^3 r} [(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + (\mathbf{N} \times \mathbf{n})].$$

Усредняя по времени угловое распределение интенсивности излучения (IV. 22), находим окончательно

$$dI = \frac{R^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

$$388. dI = \frac{a^2 d^2 \omega^6}{2\pi c^5} \cos^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

389. Начало координат поместим вблизи диполей. Радиус-вектор крайнего диполя обозначим через  $\mathbf{r}_0$ . Тогда расположение  $m$ -го диполя описывается радиус-вектором  $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_0 + m\mathbf{a}$ , где  $m = 0, 1, \dots, N-1$ . Расстояние от  $m$ -го диполя до точки наблюдения с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  равно  $R_m = r - \mathbf{n}\mathbf{r}_m$ , где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ . Напряженность магнитного поля излучаемой волны

$$\mathbf{H} = \frac{\omega^2}{c^2 r} \mathbf{n} \times \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{d} \left( t - \frac{R_m}{c} \right)$$

содержит дипольный момент системы с учетом запаздывания. Появившаяся сумма по индексу  $m$  вычисляется при помощи формулы

геометрической прогрессии

$$\sum_{m=0}^{N-1} d\left(t - \frac{R_m}{c}\right) = d_0 \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\omega t - \mathbf{k}r + \mathbf{k}r_m)} \right) =$$

$$= d_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}r + \mathbf{k}r_0) \frac{\sin \frac{Nka}{2}}{\sin \frac{ka}{2}},$$

где  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$  — волновой вектор расходящейся шаровой волны. Интенсивность излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T$

$$dI = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \frac{N\omega \mathbf{n} \mathbf{a}}{2c}}{\sin^2 \frac{\omega \mathbf{n} \mathbf{a}}{2c}} (d_0 \times \mathbf{n})^2 d\Omega.$$

390. Для диполей, изображенных на рис. 5, интенсивность излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T$  имеет вид

$$dI = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \left( \frac{5 \cos \theta}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\cos \theta}{2} \right)} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Излучение максимально под углом  $\theta = \pi/2$  и аксиально-симметрично относительно оси  $Z$ .

В случае диполей, расположенных на оси  $X$  (см. рис. 6), угловое распределение интенсивности излучения в среднем по времени за период  $T$  описывается формулой

$$dI = \frac{\omega^4 d_0^2}{8\pi c^3} \frac{\sin^2 \left( \frac{5}{2} \sin \theta \cos \psi \right)}{\sin^2 \left( \frac{1}{2} \sin \theta \cos \psi \right)} \sin^2 \theta d\Omega,$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — полярные углы точки наблюдения. Излучение максимально в направлении, перпендикулярном плоскости  $XZ$ .

## § 5. Поляризация излучаемых волн

391. В волновой зоне напряженности магнитного и электрического полей излучаемой волны имеют вид

$$\mathbf{H} = \frac{\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

Здесь  $r$  — расстояние от центра окружности до точки наблюдения,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , а  $\ddot{\mathbf{d}}$  — вторая производная от дипольного момента заряда

$$\mathbf{d} = -e\omega^2 R \mathbf{n}'.$$

Единичный вектор  $\mathbf{n}'$  направлен по радиус-вектору заряда (рис. 11). Компоненты единичных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$ :

$$\begin{aligned} n_x &= \sin \theta \cos \psi, \\ n_y &= \sin \theta \sin \psi, \quad n_z = \cos \theta, \\ n'_x &= \cos \omega t', \quad n'_y = \sin \omega t', \\ n'_z &= 0, \end{aligned}$$

где  $t' = t - r/c$  — время в точке наблюдения с учетом запаздывания,  $\theta$  и  $\psi$  — полярные углы, а ось  $Z$  направлена вдоль вектора  $\boldsymbol{\omega}$ . Введем два базисных орта  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  в плоскости, перпендикулярной направлению  $\mathbf{n}$  распространения излучаемой волны:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}}{\sin \theta}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n})}{\sin \theta}.$$

Разложим векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  по указанным ортам:

$$\mathbf{H} = H_{\tau_1} \boldsymbol{\tau}_1 + H_{\tau_2} \boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{E} = E_{\tau_1} \boldsymbol{\tau}_1 + E_{\tau_2} \boldsymbol{\tau}_2.$$

Проекции напряженностей полей на орты  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  определяются выражениями

$$H_{\tau_1} = \mathbf{H} \boldsymbol{\tau}_1 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} \cos \theta \cos (\omega t' - \psi),$$

$$H_{\tau_2} = \mathbf{H} \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} \sin (\omega t' - \psi),$$

$$E_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad E_{\tau_2} = -H_{\tau_1}.$$

В каждой точке волновой зоны при  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  векторы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  вращаются по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления

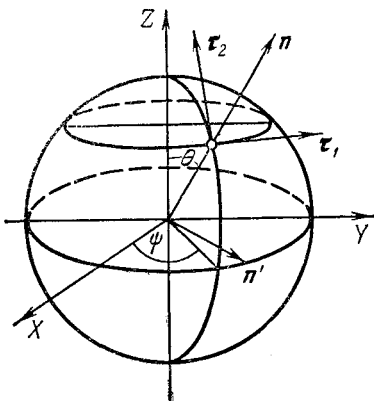


Рис. 11.

распространения волны (правое вращение). Если  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ , то вращение левое. Причем концы векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  описывают эллипсы

$$\frac{H_{\tau_1}^2}{a^2} + \frac{H_{\tau_2}^2}{b^2} = 1, \quad \frac{E_{\tau_1}^2}{b^2} + \frac{E_{\tau_2}^2}{a^2} = 1$$

с полуосями  $a$  и  $b$ , равными

$$a = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r} |\cos \theta|, \quad b = \frac{e\omega^2 R}{c^2 r}.$$

Такая волна называется эллиптически-поляризованной с правой поляризацией при  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  и левой поляризацией в области  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ . Отношение длин полуосей  $\frac{a}{b} = |\cos \theta|$  зависит от направления излучения. В частности, если излученная волна распространяется вдоль магнитного поля  $\theta = 0$  (или  $\theta = \pi$ ), то она поляризована по кругу, в то время как при распространении под прямым углом  $\theta = \frac{\pi}{2}$  волна поляризована линейно.

392. Излучение поляризовано по эллипсу с отношением длин полуосей, равным  $|\cos \theta|$ , где  $\theta$  — угол между нормалью к плоскости вращения магнитного момента и направлением на точку наблюдения. При распространении излученной волны вдоль оси вращения магнитного момента эллипс превращается в окружность. Поляризация волны правая для углов  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  и левая, если  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ . Волна, распространяющаяся под прямым углом к оси вращения магнитного момента, поляризована линейно.

393. Электрон вращается по окружности радиуса  $R = \frac{mc v}{e H_0}$  с частотой  $\omega = \frac{e H_0}{mc}$ . Ось  $Z$  выберем по направлению внешнего магнитного поля (см. рис. 11). Третья производная по времени от тензора квадрупольного момента

$$\ddot{D}_{\alpha\beta} = -12e\omega^3 R^2 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напряженность магнитного поля излучаемой волны выражается через вектор

$$\ddot{D}_{\alpha\beta} n_\beta = 12e\omega^3 R^2 \sin \theta \cdot l_\alpha,$$

где ради краткости обозначено

$$l = l_x \sin(2\omega t' - \psi) - l_y \cos(2\omega t' - \psi).$$



Здесь  $t' = t - \frac{r}{c}$  — время в точке наблюдения с учетом запаздывания, а  $\theta$  и  $\psi$  — полярные углы, фиксирующие направление единичного вектора  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  с компонентами

$$n_x = \sin \theta \cos \psi, \quad n_y = \sin \theta \sin \psi, \quad n_z = \cos \theta.$$

В волновой зоне на большом расстоянии  $r$  от центра окружности напряженности магнитного и электрического полей излучаемой волны имеют вид

$$\mathbf{H} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r} \sin \theta (\mathbf{l} \times \mathbf{n}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}.$$

Введем два базисных вектора

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{\mathbf{l}_z \times \mathbf{n}}{\sin \theta}, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{l}_z \times \mathbf{n})}{\sin \theta},$$

лежащих в плоскости, перпендикулярной направлению  $\mathbf{n}$  распространения волны. Разложение векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  по ортам  $\boldsymbol{\tau}_1$  и  $\boldsymbol{\tau}_2$  запишется так:

$$\mathbf{H} = H_{\boldsymbol{\tau}_1} \boldsymbol{\tau}_1 + H_{\boldsymbol{\tau}_2} \boldsymbol{\tau}_2, \quad \mathbf{E} = E_{\boldsymbol{\tau}_1} \boldsymbol{\tau}_1 + E_{\boldsymbol{\tau}_2} \boldsymbol{\tau}_2,$$

где

$$H_{\boldsymbol{\tau}_1} = -\frac{2ev^2\omega}{c^3r} \sin \theta \cos \theta \sin (2\omega t' - 2\psi);$$

$$H_{\boldsymbol{\tau}_2} = \frac{2ev^2\omega}{c^3r} \sin \theta \cos (2\omega t' - 2\psi);$$

$$E_{\boldsymbol{\tau}_1} = H_{\boldsymbol{\tau}_2}, \quad E_{\boldsymbol{\tau}_2} = -H_{\boldsymbol{\tau}_1}.$$

Видно, что конец вектора  $\mathbf{H}$  (а также  $\mathbf{E}$ ) описывает эллипс с отношением длин полуосей, равным  $|\cos \theta|$ . Следовательно, квадрупольное излучение поляризовано по эллипсу с правой поляризацией при  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  и левой для углов  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ . Если излученная волна распространяется вдоль оси вращения электрона  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ , то эллипс превращается в окружность, в то время как в поперечном направлении  $\theta = \pi/2$  эллипс вырождается в отрезок и волна становится линейно-поляризованной.

394. Дипольное излучение линейно-поляризовано.

395. Магнитно-дипольное излучение линейно-поляризовано.

396. Квадрупольное излучение линейно-поляризовано.

397.

$$dI = \frac{Q^2 R^4 \omega^6 \beta^2}{200\pi c^5} \sin^2 2\theta d\Omega, \quad I = \frac{4Q^2 R^4 \omega^6 \beta^2}{375c^5},$$

где  $Q = \frac{4\pi}{3} a^2 b \rho$ ,  $\theta$  — угол между осью аксиальной симметрии эллипсоида вращения и направлением на точку наблюдения, а излучаемые волны линейно-поляризованы.

У к а з а н и е. См. решение задачи 347.

398.

$$dI = \frac{Q^2 (a^2 - b^2)^2 \omega^6}{50\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta) d\Omega, \quad I = \frac{8Q^2 (a^2 - b^2)^2 \omega^6}{125c^5}.$$

Квадрупольное излучение поляризовано по эллипсу с отношением длин полуосей, равным  $|\cos \theta|$ , где  $\theta$  — угол между угловой скоростью  $\omega$  и направлением на точку наблюдения. Поляризация волны правая, если угол  $\theta$  острый, и левая при  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ . Под углами  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  распространяются циркулярные волны, а в поперечном направлении к вектору угловой скорости — линейно-поляризованная волна.

## § 6. Рассеяние электромагнитных волн

399.  $d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta d\Omega$ , где  $\theta$  — полярный угол точки наблюдения, а ось  $Z$  направлена по вектору поляризации волны. Полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

400. Если обозначить вектор поляризации волны через  $\mathbf{l}$ , то эффективное сечение рассеяния линейно-поляризованной волны в телесный угол  $d\Omega$  запишется

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 d\Omega, \quad (1)$$

где единичный вектор  $\mathbf{n}$  направлен в точку наблюдения и имеет компоненты

$$n_x = \sin \theta \cos \psi, \quad n_y = \sin \theta \sin \psi, \quad n_z = \cos \theta.$$

Ось  $Z$  выберем по направлению распространения волны, а азимутальный угол вектора поляризации обозначим через  $\psi'$ . Тогда получим

$$(\mathbf{l} \times \mathbf{n})^2 = 1 - (\mathbf{ln})^2 = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 (\psi - \psi').$$

Чтобы найти эффективное сечение рассеяния неполяризованной волны, выражение (1) следует усреднить по углу  $\psi'$ . В результате находим

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2.$$

$$401. dI = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2.$$

Здесь  $\theta$  — угол между волновыми векторами падающей и рассеянной волн.

$$402. d\sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \\ \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2},$$

где  $\theta$  — угол между волновыми векторами падающей и рассеянной волн, а атомная частота  $\omega_0$  определяется выражением  $\omega_0 = \sqrt{e^2/mR^3}$ .

$$403. d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} d\Omega, \\ \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

где  $\theta$  — угол между вектором поляризации падающей волны и направлением в точку наблюдения. Параметры  $\omega_0$  и  $\gamma$  даются формулами

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

$$404. d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} d\Omega, \\ \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

где  $\theta$  — угол между вектором поляризации падающей волны и направлением в точку наблюдения. Параметры  $\omega_0$  и  $\gamma$  имеют вид

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi\rho |e|}{m}}, \quad \gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}.$$

$$405. d\sigma = \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}{b_1^2 + b_2^2} \sin^2 \theta \right) d\Omega, \\ \sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2,$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы точки наблюдения. Полярная ось сферической системы координат выбрана вдоль направления распространения падающей волны.

406.  $\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\beta\mu\omega}{c^2} \right)^2 \sin^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол между вектором  $\mu$  и напряженностью магнитного поля падающей волны.

$$407. \quad d\sigma = \frac{\beta^2 \omega^4}{c^4} \left( 1 - \frac{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}{b_1^2 + b_2^2} \sin^2 \theta \right) d\Omega,$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{\beta^2 \omega^4}{c^4},$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — полярный и азимутальный углы точки наблюдения. Полярная ось сферической системы координат выбрана вдоль волнового вектора падающей волны.

$$408. \quad \sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 j^2}.$$

У к а з а н и е. Воспользоваться уравнением движения  $j \frac{d\Omega}{dt} = d \times E$ , а также уравнением  $\dot{d} = \Omega \times d$ , описывающим вращение вектора  $d$ , который по абсолютной величине не меняется.

## § 7. Излучение протяженных источников

409. В волновой зоне векторный потенциал электромагнитного поля, созданного заданным током, имеет вид

$$A(r, t) = \frac{1}{cr} \int j(r', t - \frac{r}{c} + \frac{nr'}{c}) dV', \quad (1)$$

где  $n = \frac{r}{r}$ , а начало координат выбрано внутри излучающей системы.

Напряженность магнитного поля указанного тока в волновой зоне

$$H(r, t) = \text{rot } A(r, t) = \frac{1}{c} \dot{A}(r, t) \times n.$$

Искомый интеграл выражается через разность значений векторного потенциала, взятых при  $t = \infty$  и  $t = -\infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(r, t) dt = \frac{1}{c} [A(r, \infty) - A(r, -\infty)] \times n.$$

Для каждой фиксированной точки наблюдения с радиус-вектором  $r$  величина времени запаздывания  $\frac{1}{c}(r - nr')$  принимает конечные значения, так как область интегрирования в интеграле (1) ограничена. Поэтому величина  $t - \frac{r}{c} + \frac{nr'}{c}$  стремится к  $\pm\infty$ ,

когда время  $t$  стремится к бесконечности  $t \rightarrow \pm\infty$ . Отсюда следует, что подынтегральная функция в интеграле (1) тождественно обращается в нуль при подстановке  $t = \infty$  или  $t = -\infty$ , если ток вне промежутка времени от  $t_1$  до  $t_2$  отсутствует.

В том случае, когда объемная плотность  $\mathbf{j}$  заданного тока вне промежутка времени  $(t_1, t_2)$  постоянна, векторные функции  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty)$  и  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty)$  удовлетворяют условию замкнутости токовых линий

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \infty) dV' = \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', -\infty) dV' = 0,$$

которое было установлено ранее при решении задачи 144.

Следовательно, в условиях данной задачи в волновой зоне имеем  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \infty) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, -\infty) = 0$ , откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) dt = 0. \quad (2)$$

Для линейно-поляризованной волны  $\mathbf{H} = I\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} H(\mathbf{r}, t) dt$  представляет собой площадь в плоскости переменных  $H$  и  $t$ , которую назовем площадью излученного электромагнитного импульса. Согласно полученному результату (2) в каждой точке наблюдения волновой зоны площадь прошедшего электромагнитного импульса равна нулю.

Если вектор  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  в точке наблюдения  $\mathbf{r}$  поворачивается со временем в плоскости, перпендикулярной направлению  $\mathbf{n}$  распространения волны, то обращаются в нуль площади  $\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\mathbf{r}, t) dt$  и

$\int_{-\infty}^{\infty} H_2(\mathbf{r}, t) dt$ , где  $H_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{H}$  и  $H_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{H}$ , а единичные векторы  $\mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{I}_2$  и  $\mathbf{n}$  образуют правовинтовую тройку. Рассуждения для напряженности электрического поля аналогичны.

410. На большом расстоянии  $r \gg kl^2$  от тока приближенно выполняется равенство  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - \mathbf{n}\mathbf{r}'$ , а векторный потенциал (IV.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{J_0 l z}{cr} \int_{-l}^l \cos kz' \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + kz' \cos \theta \right] dz' = \\ &= \frac{J_0 l z}{\omega r} \left( \frac{\sin [kl(1 - \cos \theta)]}{1 - \cos \theta} + \frac{\sin [kl(1 + \cos \theta)]}{1 + \cos \theta} \right) \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \end{aligned}$$

При помощи формул тригонометрии последнее выражение можно заметно упростить

$$A = (-1)^m \frac{2J_0 I_z}{\omega r \sin^2 \theta} \cos \frac{(2m+1)\pi \cos \theta}{2} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Напряженность магнитного поля излучаемой волны

$$H = (I_z \times n) \frac{(-1)^m 2J_0}{cr \sin^2 \theta} \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \cos \theta \right] \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right).$$

Согласно общей формуле (IV. 22) интенсивность излучения в телесный угол  $d\Omega$  в среднем по времени за период  $T$  запишется:

$$dI = \frac{J_0^2}{2\pi c \sin^2 \theta} \cos^2 \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi \cos \theta \right] d\Omega.$$

412.

$$E = \frac{I_z}{cr} \left[ J \left( t - \frac{r+l}{c} \right) - J \left( t - \frac{r-l}{c} \right) \right], \quad H = n \times E.$$

413. Векторный потенциал (IV. 8) в плоскости  $XY$  на большом расстоянии от тока можно записать в следующем виде:

$$A = (-1)^m \frac{2J_0 I_z}{r \omega_m} e^{-\gamma t'} \sin \omega_m t'.$$

где  $t' = t - r/c$  — время в точке наблюдения с учетом запаздывания. Напряженность магнитного поля имеет только угловую составляющую в цилиндрических координатах, которая описывается формулой

$$H_\psi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = (-1)^m \frac{2J_0}{cr} e^{-\gamma t'} \left[ \cos \omega_m t' - \frac{\gamma}{\omega_m} \sin \omega_m t' \right],$$

где  $t' \geq 0$  и  $H_\psi = 0$  при  $t' < 0$ . Векторы  $E$  и  $H$  вместе с радиус-вектором  $r$  точки наблюдения образуют правовинтовую тройку векторов, поэтому

$$E_z = -H_\psi, \quad E_x = E_y = 0.$$

Чтобы представить электромагнитное поле излучения в виде суперпозиции монохроматических волн, разложим напряженность электрического поля в интеграл Фурье

$$E_z(t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega.$$

Непосредственным вычислением находим

$$E_z(\omega) = E_+(\omega) + iE_-(\omega),$$

$$E_+(\omega) = \frac{2E_0\omega^2\gamma}{(\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_-(\omega) = \frac{E_0\omega(\omega^2 - \omega_m^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 + \omega_m^2 + \gamma^2)^2 - 4\omega^2\omega_m^2},$$

$$E_0 = (-1)^{m+1} \frac{2J_0}{cr}.$$

Таким образом, разложение напряженности электрического поля излучения по монохроматическим волнам имеет вид

$$E_z = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ E_+(\omega) \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + E_-(\omega) \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] d\omega.$$

Равенство  $H_\psi = -E_z$  позволяет получить аналогичное разложение для напряженности магнитного поля.

$$414. \quad dI = \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 [kl(1 - \cos \theta)]}{(1 - \cos \theta)^2} d\Omega.$$

$$415. \quad H_r = H_\theta = 0,$$

$$H_\psi = (-1)^m \frac{2 \sin(m\pi \cos \theta)}{cr \sin \theta} \frac{\sin \left[ \frac{N}{2} ka \sin \theta \cos \psi \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} ka \sin \theta \cos \psi \right]} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right);$$

$$dI = \frac{J_0^2 \sin^2(kl \cos \theta)}{2\pi c \sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \left[ \frac{N}{2} ka \sin \theta \cos \psi \right]}{\sin^2 \left[ \frac{1}{2} ka \sin \theta \cos \psi \right]} d\Omega.$$

$$416. \quad dI = \frac{2i_0^2}{\pi \omega k} \frac{\sin^2(kl \cos \theta) \sin^2(kb \sin \theta \cos \psi)}{\sin^4 \theta \cos^2 \psi} d\Omega.$$

417.

$$dI = \frac{2\pi R^2 i_0^2}{c} \left( \frac{\sin \theta \sin [kl(1 - \cos \theta)] J_0(kR \sin \theta)}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\Omega.$$

Здесь  $J_0(a)$  — функция Бесселя нулевого порядка, аргумент которой  $a = kR \sin \theta$ . Эта функция появилась в результате интегрирования

$$\int_0^{2\pi} \cos [a \cos(\psi' - \psi)] d\psi' = 2\pi J_0(a).$$

При решении задачи использован также интеграл

$$\int_0^{2\pi} \sin [a \cos (\psi' - \psi)] d\psi' = 0.$$

418. На достаточно большом расстоянии  $r$  от конусов векторный потенциал поля излучения дается формулой

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \mathbf{i} \left( \mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} \right) dS', \quad (1)$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$  и  $dS' = r' \sin \theta_0 d\psi' dr'$ , а интегрирование проводится по боковым поверхностям конусов, по которым течет ток с поверхностной плотностью

$$\mathbf{i}(\mathbf{r}', t') = \frac{J(r', t')}{2\pi r' \sin \theta_0} \boldsymbol{\tau}.$$

Единичный вектор  $\boldsymbol{\tau}$  направлен вдоль образующей конусов. В принятых обозначениях векторы подынтегрального выражения (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (I_x \cos \psi + I_y \sin \psi) \sin \theta + I_z \cos \theta, \\ \mathbf{r}' &= r' [(I_x \cos \psi' + I_y \sin \psi') \sin \theta_0 \pm I_z \cos \theta_0], \\ \boldsymbol{\tau} &= \pm \frac{\mathbf{r}'}{r'}, \end{aligned}$$

где  $\theta$  и  $\psi$  — сферические координаты точки наблюдения, а знаки  $+$  и  $-$  отвечают соответственно верхней ( $z' > 0$ ) и нижней ( $z' < 0$ ) боковым поверхностям конусов.

Поскольку в распределении тока имеется аксиальная симметрия, искомый векторный потенциал в сферических координатах  $r$ ,  $\theta$  и  $\psi$  не зависит от угла  $\psi$ . Поэтому в подынтегральном выражении (1) можно положить  $\psi = 0$ . Тогда интеграл по переменной  $\psi'$ , содержащий множитель  $I_y \sin \psi'$ , обращается в нуль.

Принимая во внимание сделанные замечания, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{2\pi cr} \int_0^b dr' \int_0^{2\pi} d\psi' \left[ J \left( r', t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c} \cos \Phi \right) \times \right. \\ &\quad \times (I_z \cos \theta_0 + I_x \sin \theta_0 \cos \psi') + \\ &\quad \left. + J \left( r', t - \frac{r}{c} + \frac{r'}{c} \cos \tilde{\Phi} \right) (I_z \cos \theta_0 - I_x \sin \theta_0 \cos \psi') \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi cr} \int_{-b}^b d\xi \int_0^{2\pi} d\psi' J \left( |\xi|, t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c} \cos \Phi \right) \times \\ &\quad \times (I_z \cos \theta_0 + I_x \sin \theta_0 \cos \psi'). \end{aligned}$$



где введены обозначения:  $\cos \Phi = \sin \theta_0 \sin \theta \cos \psi' + \cos \theta_0 \cos \theta$ ,  $\cos \tilde{\Phi} = \sin \theta_0 \sin \theta \cos \psi' - \cos \theta_0 \cos \theta$ .

Исследуя выражение  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ , нетрудно убедиться в том, что магнитное поле имеет лишь угловую составляющую  $H_\psi$ . Другие компоненты вектора  $\mathbf{H}$  равны нулю, как и должно быть в задаче с аксиальной симметрией. Окончательно находим

$$dI = \frac{1}{2(2\pi c)^3} \left| \int_{-b}^b d\xi \int_0^{2\pi} d\psi' \frac{\partial}{\partial t} J \left( |\xi|, t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c} \cos \Phi \right) \times \right. \\ \left. \times (\cos \theta_0 \sin \theta - \sin \theta_0 \cos \theta \cos \psi') \right|^2 d\Omega; \\ dI = \frac{\sin^2 \theta}{4\pi c^3} \left[ \int_{-b}^b \frac{\partial}{\partial t} J \left( |\xi|, t - \frac{r}{c} + \frac{\xi}{c} \cos \theta \right) d\xi \right]^2 d\Omega \quad \text{при } \theta_0 \rightarrow 0; \\ dI = 0 \quad \text{при } \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

## § 8. Задачи, требующие вычисления на ЭВМ

419.

$$\mathcal{E}_d = \mathcal{E}_0 \int_{\eta_0}^{\infty} \frac{\left( \frac{d\psi(\eta)}{d\eta} \right)^2 d\eta}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{a^2} \frac{1}{\eta^2} + \psi(\eta)}}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{3} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{e^2}{a}, \\ \psi(\eta) = 2 \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) e^{-2\eta},$$

где величина  $\eta_0$  является корнем уравнения

$$1 - \frac{l^2}{a^2} \frac{1}{\eta_0^2} + \psi(\eta_0) = 0.$$

На рис. 12 изображен график натурального логарифма  $\ln(\mathcal{E}_d/\mathcal{E}_0)$  как функция параметра  $l/a$ . Некоторое представление о зависимости полной энергии дипольного излучения от прицельного расстояния дает таблица 1.

Таблица 1

| $l/a$                         | 0,5               | 1   | 2                    | 5                   |
|-------------------------------|-------------------|-----|----------------------|---------------------|
| $\mathcal{E}_d/\mathcal{E}_0$ | $3,36 \cdot 10^2$ | 5,2 | $1,23 \cdot 10^{-2}$ | $5,5 \cdot 10^{-8}$ |

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{\sqrt{x}} \int_0^\infty d\xi \int_{\eta_0(\xi)}^\infty d\eta \frac{\xi e^{-2\eta}}{\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x}}},$$

$$\kappa_0 = \frac{4\pi a e^2 U_0}{3mc^3} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}, \quad x = \frac{\mathcal{E}_0}{U_0},$$

где функция  $\eta_0 = \eta_0(\xi)$  определяется как решение уравнения

$$1 - \frac{\xi^2}{\eta_0^2} - \frac{e^{-\eta_0}}{x} = 0.$$

Зависимость величины  $\kappa/\kappa_0$  от параметра  $\mathcal{E}_0/U_0$  представлена на рис. 13.

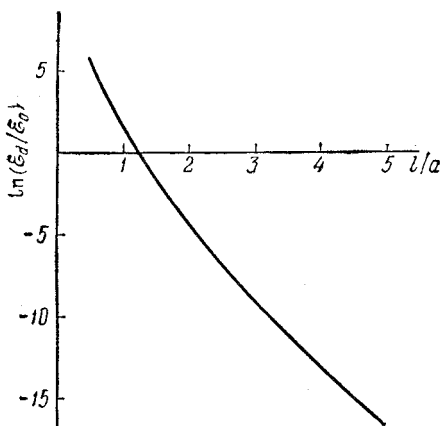


Рис. 12.

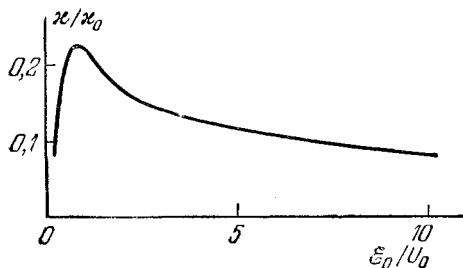


Рис. 13.

У к а з а н и е. Для вычисления на ЭВМ удобно перейти от двукратного интеграла к однократному, выполнив сначала интегриро-

вание по переменной  $\xi$  в пределах от 0 до  $\xi_0(\eta)$ , а затем по  $\eta$  в промежутке от  $\eta_{\min}$  до  $\infty$ . В плоскости переменных  $\eta$  и  $\xi$  интегрирование проводится по области, которая заштрихована на схематическом рис. 14. Для каждого фиксированного значения  $x$  функция  $\xi_0(\eta)$  определяется как решение уравнения

$$1 - \frac{\xi_0^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x} = 0.$$

При вычислении минимального значения  $\eta_{\min}$  переменной  $\eta$  следует принять во внимание неравенство

$$1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} - \frac{e^{-\eta}}{x} \geq 0,$$

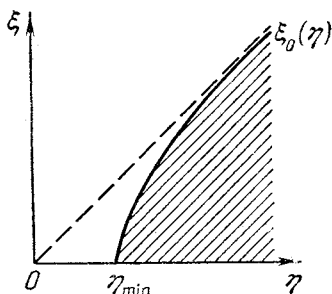


Рис. 14.

что дает  $\eta_{\min} = -\ln x$  при  $x < 1$  и  $\eta_{\min} = 0$  при  $x \geq 1$ . В результате имеем

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{\sqrt{x}} \int_{\eta_{\min}}^{\infty} \eta^2 e^{-2\eta} \sqrt{1 - \frac{e^{-\eta}}{x}} d\eta.$$

Асимптотическое выражение величины  $\kappa$  при больших значениях  $x \gg 1$

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{4\sqrt{x}}.$$

421.  $I = I_0 (f_1^2 + f_2^2)$ , где

$$I_0 = \frac{2e^4 Q^2}{3m^2 c^3 l^4},$$

$$f_1 = \frac{1}{(1 - \eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\sin \frac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1 - \xi^2)^{3/2}} d\xi,$$

$$f_2 = \frac{\eta}{(1 - \eta^2)^{3/2}} - \frac{\omega_0 l}{v} \int_{-\infty}^{\eta} \frac{\xi \sin \frac{\omega_0 l}{v} (\eta - \xi)}{(1 - \xi^2)^{3/2}} d\xi,$$

$$\eta = \frac{vt}{l}.$$

На рис. 15 изображена относительная интенсивность  $I/I_0$  излучения осциллятора как функция переменной  $\eta$ , которая для случая  $v = \omega_0 l$  принимает значение  $\eta = \omega_0 t$ .

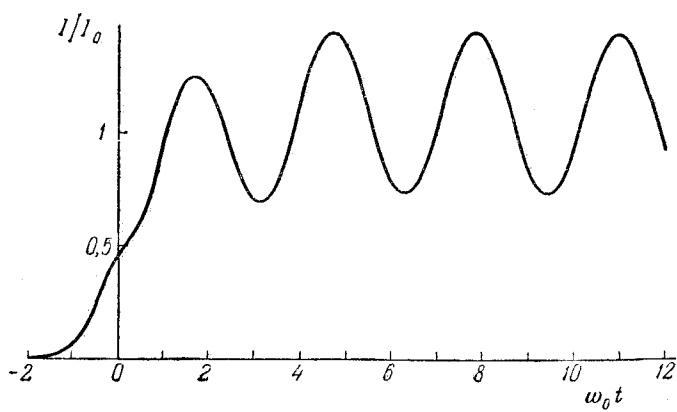


Рис. 15.

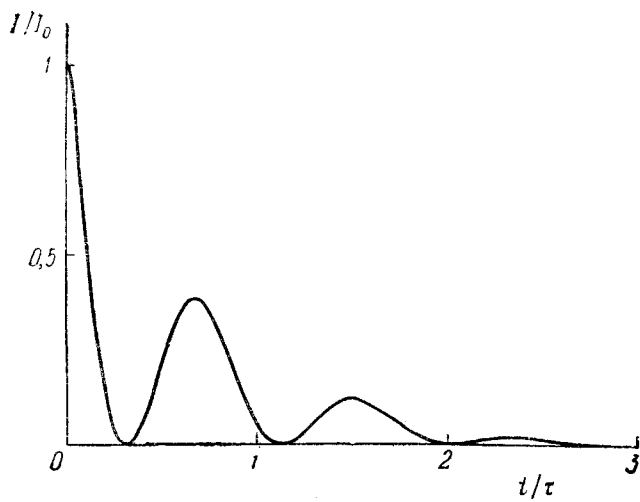


Рис. 16.

422.  $I = I_0 f^2$ , где

$$I_0 = \frac{2e^2 F_0^2}{3m^2 c^3},$$

$$f = e^{-\eta^2} - \int_{\eta_0}^{\eta} e^{\frac{\gamma\tau}{2}(\xi-\eta)-\xi^2} \left[ \gamma\tau \cos \omega\tau (\eta - \xi) + \left( \omega\tau - \frac{\gamma^2\tau}{4\omega} \right) \sin \omega\tau (\eta - \xi) \right] d\xi,$$

$$\omega = \left( \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{t}{\tau}, \quad \eta_0 = \frac{t_0}{\tau}.$$

Интенсивность  $I$  излучения осциллятора как функция переменной  $t/\tau$  при  $\gamma = \omega_0/2 = 2/\tau$  для случаев  $t_0 = 0$  и  $t_0 = -\infty$  представлена соответственно на рис. 16 и 17.

423. 
$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8Q^2\beta^2\omega^4}{3\pi c^3 v^2 l^2} (f_1^2 + f_2^2) d\omega,$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos \frac{\omega l}{v} \xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi, \quad f_2 = \int_0^\infty \frac{\xi \sin \frac{\omega l}{v} \xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} d\xi.$$

Спектральное разложение излучения представлено на рис. 18. Единице на оси ординат соответствует величина  $\frac{8Q^2\beta^2 v^2}{3\pi c^3 l^6}$ .

424. 
$$\frac{d\mathcal{E}_\omega^a}{d\omega} = \frac{4e^2 \mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi m c^3 (A_1 + A_2)} \left( \frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right)^2 F^2,$$

$$F = 2 \int_0^\infty \frac{\cos \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi) \right]}{1 + \text{ch } \xi} d\xi, \quad \omega_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{Z_1 Z_2 e^2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0 (A_1 + A_2)}{m A_1 A_2}};$$

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega^b}{d\omega} = \frac{4e^2 \mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi m c^3 (A_1 + A_2)} \left( \frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right)^2 (f_1^2 + f_2^2),$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi) \right]}{1 + \text{ch } \xi} d\xi, \quad f_2 = \int_0^\infty \frac{\sin \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \text{sh } \xi) \right]}{1 + \text{ch } \xi} d\xi.$$

Спектральное разложение излучения представлено на рис. 19. Кривые 1 и 2 отвечают соответственно случаям а и б. Единице на оси ординат соответствует величина

$$\frac{4e^2 \mathcal{E}_0 A_1 A_2}{3\pi m c^3 (A_1 + A_2)} \left( \frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right)^2.$$

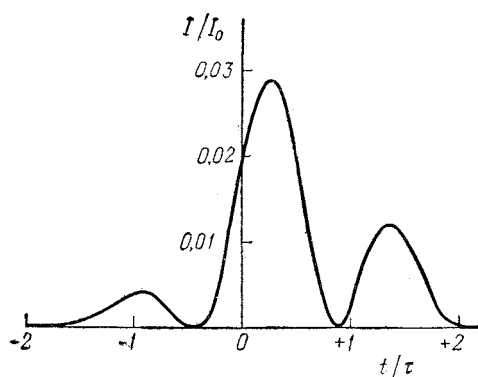


Рис. 17.

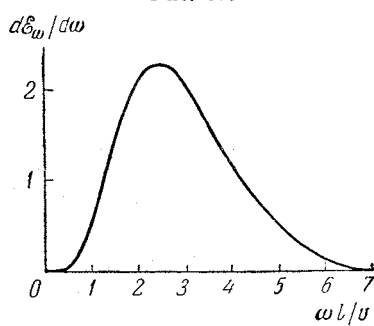


Рис. 18.

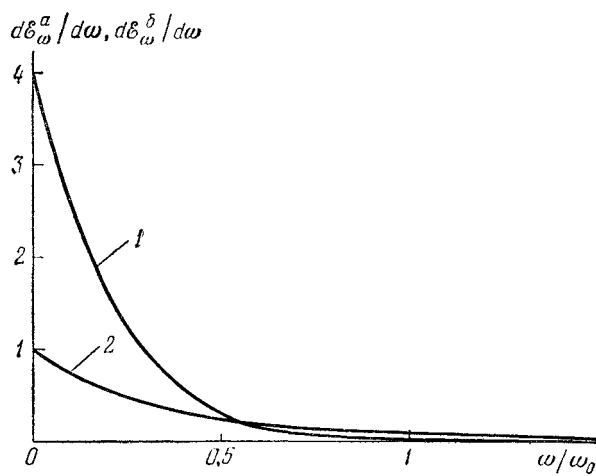


Рис. 19.

$$425. \quad \frac{d\mathcal{E}_\omega^a}{d\omega} = \frac{8e^2 Z^2}{15\pi c A^2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 F^2,$$

$$F = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \xi \sin \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \operatorname{sh} \xi) \right]}{(1 + \operatorname{ch} \xi)^2} d\xi,$$

$$\omega_0 = \frac{2\mathcal{E}_0}{Z_1 Z_2 e^2} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0 (A_1 + A_2)}{m A_1 A_2}};$$

$$\frac{d\mathcal{E}_\omega^b}{d\omega} = \frac{8e^2 Z^2}{15\pi c A^2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 (f_1^2 + f_2^2),$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \xi \sin \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \operatorname{sh} \xi) \right]}{(1 + \operatorname{ch} \xi)^2} d\xi,$$

$$f_2 = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} \xi \cos \left[ \frac{\omega}{\omega_0} (\xi + \operatorname{sh} \xi) \right]}{(1 + \operatorname{ch} \xi)^2} d\xi.$$

Спектральное разложение излучения представлено на рис. 20.

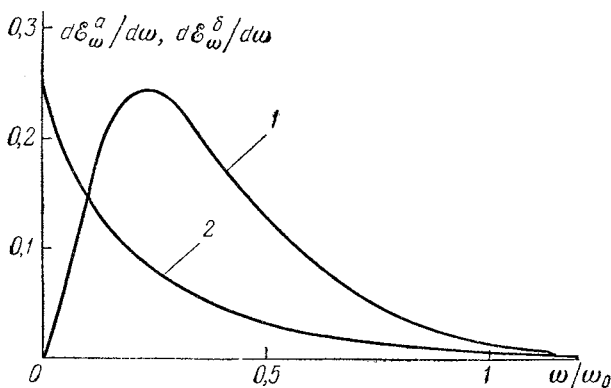


Рис. 20.

Кривые 1 и 2 отвечают соответственно случаям а и б. Единицы на оси ординат соответствует величина

$$\frac{8e^2 Z^2}{15\pi c A^2} \left( \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2.$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{c\tau^2 E_0^2}{(2\pi)^2} \left( \int_0^\infty e^{-\xi\tau} \cos[(\omega - \omega_0)\tau\xi] d\xi \right)^2.$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau},$$

где величина  $x$  является корнем уравнения

$$\int_0^\infty e^{-\xi\tau} (1 - \sqrt{2} \cos x\xi) d\xi = 0.$$

Спектральная линия излучения представлена на рис. 21. Единица на оси ординат отвечает величина  $c\tau^2 E_0^2 / (2\pi)^2$ . Ширина спектральной линии  $\Delta\omega = 2,8/\tau$ .

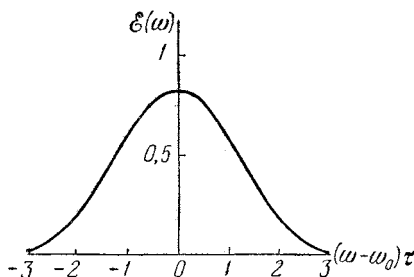


Рис. 21.

$$\mathbf{E} = l_z E_0 \int_{-1}^1 \left( e^{-\left(t' - \frac{t-b\xi}{c\tau}\right)} - e^{-\left(t' + \frac{t+b\xi}{c\tau}\right)} \right) d\xi,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad E_0 = \frac{bi_0}{cr},$$

$$t' = \frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{c\tau^2 E_0^2}{\pi^2} \left[ \int_0^\infty d\eta \int_{-1}^1 d\xi (e^{-(\xi-1+\eta)\tau} - e^{-(\xi+1+\eta)\tau}) \sin \omega\tau\eta \right]^2.$$

График напряженности электрического поля и спектральная линия излучения изображены на рис. 22 и 23 соответственно. Единица на оси ординат на рис. 23 отвечает величина  $c\tau^2 E_0^2 / \pi^2$ .



$$428. \frac{dI}{d\Omega} = \frac{2\pi R^4 j_0^2}{c} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 [kh(1 - \cos \theta)]}{(1 - \cos \theta)^2} \left( \int_0^1 e^{-\xi} J_0(kR\xi \sin \theta) \xi d\xi \right)^2.$$

Диаграмма направленности излучения представлена на рис. 24 для случая  $h = R = 1/k$ . Направление максимального излучения с

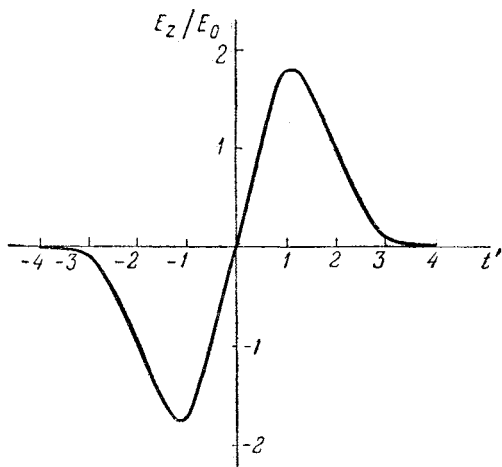


Рис. 22.

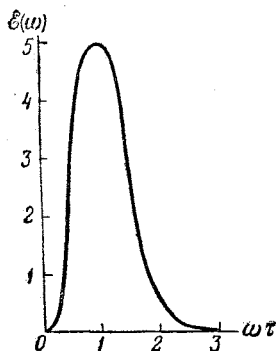


Рис. 23.

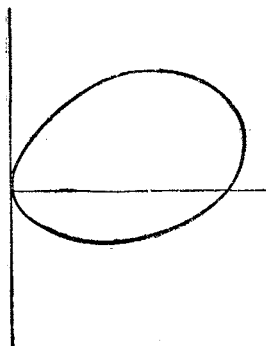


Рис. 24.

интенсивностью  $\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\max} = \frac{R^4 j_0^2}{2c}$  составляет с полярной осью угол  $\theta_m = 73^\circ$ .

$$429. \frac{dI}{d\Omega} =$$

$$= \frac{J_0^2}{4\pi^3 c} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\cos \frac{\pi (\cos \theta + \sin \theta \cos \psi)}{2\sqrt{2}}}{1 + \sin^2 \theta \sin^2 \psi - \sin 2\theta \cos \psi} (\sin \theta - \cos \theta \cos \psi) d\psi \right)^2.$$

На рис. 25 изображена зависимость величины  $dI/d\Omega$  от угла  $\theta$ . Единице на оси ординат соответствует величина  $J_0^2/(4\pi^3 c)$ . График симметричен относительно прямой  $\theta = \pi/2$ .

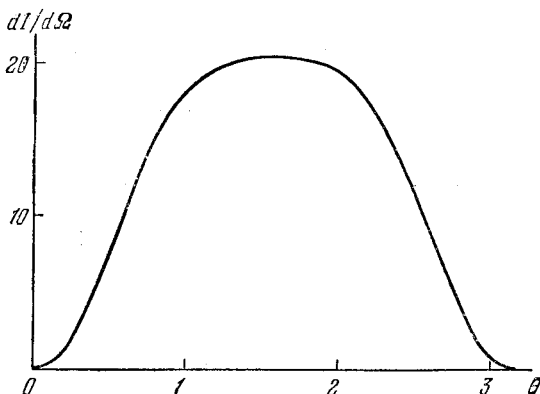


Рис. 25.

430. В волновой зоне, где напряженности электрического и магнитного полей по модулю убывают обратно пропорционально расстоянию от точки наблюдения до центра излучающей системы, выполняется соотношение  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - n\mathbf{r}'$ , и запаздывающий векторный потенциал (IV.8) принимает вид

$$A_\alpha(\mathbf{r}, t) = \frac{I_\beta}{cr} \int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{n\mathbf{r}'}{c}\right) dV'. \quad (1)$$

Полученный интеграл по своим индексам  $\alpha$  и  $\beta$  является трехмерным симметричным тензором второго ранга. Поскольку подынтегральное выражение содержит единственный независимый вектор

$\mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$ , указанный тензор должен иметь вид

$$\int \frac{x'_\alpha x'_\beta}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{n\mathbf{r}'}{c}\right) dV' = a\delta_{\alpha\beta} + b n_\alpha n_\beta, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые скалярные величины.

Приравниваем диагональные суммы тензоров левой и правой частей равенства (2)

$$\int F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{nr'}{c}\right) dV' = 3a + b. \quad (3)$$

Умножим обе части равенства (2) на выражение  $n_\alpha n_\beta$  и просуммируем по повторяющимся тензорным индексам

$$\int \frac{(nr')^2}{r'^2} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{nr'}{c}\right) dV' = a + b. \quad (4)$$

Решая совместно алгебраические уравнения (3) и (4), определяем величины  $a$  и  $b$ , через которые выражается векторный потенциал (1)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{cr} [a\mathbf{l} + b(\ln \mathbf{n})]. \quad (5)$$

При вычислении ротора векторного потенциала (5) в волновой зоне отбрасываем слагаемые, содержащие множитель  $1/r^2$ . В результате находим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = & \\ = & \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{n}}{2c^2 r} \int \left(1 - \frac{(nr')^2}{r'^2}\right) \times \\ \times & \frac{\partial}{\partial t} F\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{nr'}{c}\right) dV'. \end{aligned}$$

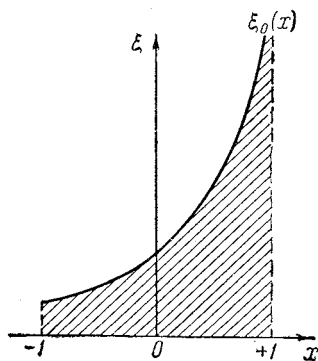


Рис. 26.

Если вместо функции  $F(r, t)$  подставить заданное выражение и положить  $\sigma = 10\lambda$  и  $\frac{1}{\tau} \left(t - \frac{r}{c}\right) = t'$ , то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{\pi \lambda^3 j_0}{c^2 \tau r} \int_0^\infty d\xi \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) \times \\ \times \left[1 - t' + \frac{\xi}{10} (1 - x)\right] e^{-\left[\xi + t' - \frac{\xi}{10} (1 - x)\right]}, \quad (6) \end{aligned}$$

где интегрирование проводится по заштрихованной площади на схематическом рис. 26. В области интегрирования выполняется условие  $t' \geq \xi(1 - x)/10$ , которое является следствием запаздывания электромагнитных сигналов, приходящих в точку наблюдения.

При фиксированном значении  $x$  проведем интегрирование в интеграле (6) по переменной  $\xi$  в пределах от 0 до  $\xi_0(x) = 10t'/(1 - x)$

(рис. 26). Оставшийся интеграл по переменной  $x$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{10\pi\lambda^3 j_0}{c^2 \tau r} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{(x+9)^2} \left[ (10-t'x-9t') e^{-t'} - 10e^{-\frac{10t'}{1-x}} \right] dx$$

определяется при помощи численных методов.

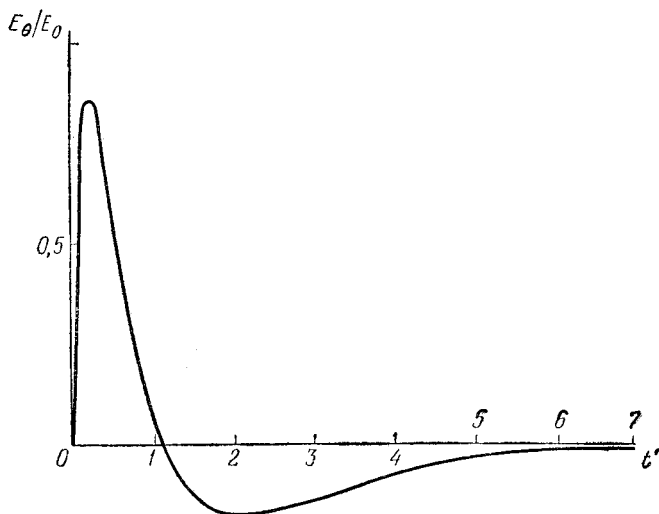


Рис. 27.

Напряженности электрического и магнитного полей в волновой зоне связаны между собой соотношением  $\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}$  или в сферической системе координат

$$\mathbf{E} = l_\theta E_\theta, \quad \mathbf{H} = l_\psi H_\psi, \quad E_\theta = H_\psi.$$

Напряженность  $E_\theta$  электрического поля излучения в некоторой фиксированной точке волновой зоны изображена на рис. 27. Единице на оси ординат отвечает величина  $E_0 = \pi\lambda^3 j_0 \sin \theta / c^2 \tau r$ .

## Глава V

# ПОЛЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

### § 1. Преобразование электромагнитного поля

431. Если найдена система координат  $K'$ , в которой  $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$ , то любая другая координатная система  $K''$ , движущаяся параллельно векторам  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$ , также отвечает поставленному условию  $\mathbf{E}'' \parallel \mathbf{H}''$ . Поэтому будем искать систему координат с заданными свойствами среди тех, которые движутся перпендикулярно векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . При переходе в такие координатные системы векторы напряженностей электрического и магнитного полей поворачиваются в плоскости, перпендикулярной относительной скорости этих систем, а компоненты напряженностей, параллельные относительной скорости, не возникают.

Выберем исходную систему координат так, чтобы  $E_x = H_x = 0$ . Тогда искомая штрихованная система координат движется с некоторой скоростью  $\mathbf{V}$  вдоль оси  $X$ , причем одноименные декартовы оси указанных координатных систем параллельны. В искомой системе координат имеем  $E'_x = H'_x = 0$  и  $\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' = 0$ , что дает

$$E'_y H'_z - H'_y E'_z = 0. \quad (1)$$

Выразим штрихованные компоненты векторов через нештрихованные по формулам преобразования полей (V.28) и (V.29). После этого соотношение (1) превратится в квадратное уравнение относительно величины  $V/c$ :

$$\left(\frac{V}{c}\right)^2 - \frac{E^2 + H^2}{|\mathbf{E} \times \mathbf{H}|} \frac{V}{c} + 1 = 0,$$

где  $V$  — проекция искомой скорости на ось  $X$ . Из двух корней этого уравнения выбираем тот, который отвечает условию  $\left|\frac{V}{c}\right| < 1$ . Другой корень удовлетворяет неравенству противоположного смысла,

так как произведение корней равно единице. Окончательно находим

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = (E^2 + H^2 - \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\mathbf{E}\mathbf{H})^2}) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{2(\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2}.$$

Если  $\mathbf{E}\mathbf{H} < 0$ , то в найденной системе координат векторы  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{H}'$  антипараллельны.

432. а) Пусть  $E > H$ , тогда согласно инвариантам электромагнитного поля (V. 32) существует такая инерциальная система координат  $K'$ , в которой отлично от нуля только электрическое поле  $\mathbf{E}' \neq 0$ ,  $\mathbf{H}' = 0$ . Скорость  $\mathbf{V}$  этой штрихованной координатной системы лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{H}$ , так как компонента вектора напряженности магнитного поля, параллельная вектору  $\mathbf{V}$ , не меняется при переходе в указанную систему отсчета  $\mathbf{H}\mathbf{V} = \mathbf{H}'\mathbf{V} = 0$ . Векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{E}$  образуют между собой некоторый угол  $\alpha$ .

Ради удобства выбираем направления векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$  в качестве осей  $X$  и  $Z$  исходной системы координат. Тогда искомая система координат  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{V}$  вдоль оси  $X$ , причем одноименные декартовы оси двух упомянутых координатных систем параллельны. В координатной системе  $K'$  магнитное поле отсутствует:

$$H'_x = H'_y = 0, \quad H'_z = \frac{H_z - \frac{V}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

где  $H_z = H$  и  $E_y = E \sin \alpha$ . Отсюда получаем

$$\frac{V}{c} = \frac{H}{E \sin \alpha}, \quad \frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{(\mathbf{n} \times \mathbf{E})^2} \mathbf{n}.$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Условие  $\left| \frac{V}{c} \right| < 1$  накладывает ограничения на возможные направления  $\mathbf{n}$  относительно вектора  $\mathbf{E}$ :

$$|\sin \alpha| > \frac{H}{E}.$$

При помощи формул (V. 28) находим

$$\mathbf{E}' = \mathbf{n}(\mathbf{E}\mathbf{n}) + \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{H} \times \mathbf{n}|} \sqrt{(\mathbf{E} \times \mathbf{n})^2 - H^2}.$$

б) Если  $E < H$ , то существует такая система координат, в которой имеется только магнитное поле. Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{n} \times \mathbf{E})}{(\mathbf{n} \times \mathbf{H})^2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{n}(\mathbf{H}\mathbf{n}) + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{E} \times \mathbf{n}|} \sqrt{(\mathbf{H} \times \mathbf{n})^2 - E^2},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ . Условие  $\left| \frac{V}{c} \right| < 1$  накладывает ограничения на возможные значения угла  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$|\sin \alpha| > \frac{E}{H}.$$

433.  $\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{2((\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n}) \mathbf{n}}{(\mathbf{E} \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{H} \times \mathbf{n})^2}$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор произвольного направления.

$$434. \mathbf{V} = \pm \frac{c}{N} \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{j}|}.$$

$$436. E' = \frac{1}{\sqrt{2}} (E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 8(\mathbf{E}\mathbf{H})^2})^{1/2},$$

$$H' = \frac{1}{\sqrt{2}} (H^2 - E^2 + \sqrt{(H^2 - E^2)^2 + 8(\mathbf{H}\mathbf{E})^2})^{1/2}.$$

437. В координатной системе, связанной с ядром, имеем

$$\mathbf{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = 0.$$

В штрихованной инерциальной системе координат, где в данный момент нейтрон покоится, магнитное поле легко определить с указанной точностью при помощи формул преобразования (V.31):

$$\mathbf{H}' = -\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}).$$

Поэтому сила, приложенная к нейтрону, запишется как

$$\mathbf{F}' = \text{grad}' (\mu \mathbf{H}')$$

В том же приближении четырехмерная сила  $f'_i = (f'_1, f'_4)$  имеет компоненты

$$f'_1 = \frac{F'}{c \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \bigg|_{v'=0} = \frac{F'}{c}, \quad f'_4 = \frac{v' F'}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \bigg|_{v'=0} = 0,$$

где скорость  $\mathbf{v}'$  нейтрона в штрихованной системе координат положена равной нулю. Используя формулы преобразования 4-вектора и отбрасывая малые слагаемые, пропорциональные  $v^2/c^2$ , определяем пространственные компоненты 4-силы  $f_i = (f, f_4)$  в исходной системе координат

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' = \frac{1}{c} \text{grad}' (\mu \mathbf{H}').$$

Если пренебречь членами порядка  $\frac{v^2}{c^2}$ , то  $\mathbf{f} = \frac{1}{c} \mathbf{F}$ , а компоненты радиус-векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  связаны между собой преобразованием

Галилея. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Это позволяет окончательно написать

$$\mathbf{F} = \text{grad} \left( \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}}{c} \mathbf{E} \right) = \frac{Q}{c} \left( \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}) \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} \right).$$

Видно, что летящий магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  по отношению к внешнему полю  $\mathbf{E}$  эквивалентен электрическому диполю с моментом

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\mu}}{c}.$$

438.  $\mathbf{F} = \text{grad} \left( \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c} \mathbf{H} \right) = \left( \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c} \text{grad} \right) \mathbf{H}$ . Из выражения для силы следует вывод, что летящий электрический диполь  $\mathbf{d}$  по отношению к внешнему полю  $\mathbf{H}$  эквивалентен магнитному моменту  $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{d} \times \mathbf{v}}{c}$ .

439. У к а з а н и е. Воспользоваться законом преобразования тензоров (V. 9) и матрицей (V. 5) преобразования Лоренца.

$$441. \quad \omega = \omega' \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'},$$

где  $\omega$  и  $\theta$  — частота электромагнитной волны и угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и скоростью  $\mathbf{V}$  движения штрихованной инерциальной системы координат относительно покоящейся в соответствии с обозначениями, принятыми в формулах (V. 3)–(V. 6). Штрихом обозначены аналогичные величины в движущейся системе отсчета. В случае  $V \ll c$  имеем

$$\omega = \omega' \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \theta' \right) = \omega' + \mathbf{k}' \mathbf{V} \quad \text{при} \quad \frac{V}{c} \ll |\cos \theta'|,$$

$$\omega = \omega' \left( 1 + \frac{V^2}{2c^2} \right) \quad \text{при} \quad \theta' = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta' - \theta = \frac{V}{c} \sin \theta.$$

442. В штрихованной системе координат, связанной с движущимся зеркалом, законы отражения электромагнитной волны приводят к равенствам  $k'_{1x} = -k'_{2x}$  и  $\omega'_1 = \omega'_2$ , где ось  $X'$  направлена вдоль вектора скорости  $\mathbf{V}$  зеркала, а одноименные декартовы оси покоящейся и движущейся систем координат параллельны. В указанных двух равенствах при помощи формул преобразования Лоренца выражаем штрихованные компоненты четырехмерных волновых век-



торов  $k'_{1l} = \left(k'_1, i \frac{\omega'_1}{c}\right)$  и  $k'_{2l} = \left(k'_2, i \frac{\omega'_2}{c}\right)$  через их компоненты в покоящейся координатной системе. В результате получаем два алгебраических уравнения относительно искомых величин. Решение последних отвечает на поставленные вопросы

$$\cos \theta_2 = \frac{2\beta + (1 + \beta^2) \cos \theta_1}{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \theta_1},$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \theta_1}{1 - \beta^2},$$

где обозначено  $\beta = V/c$ .

$$443. \omega = \omega_0 \left(\frac{c+V}{c-V}\right)^2, \quad g = \frac{\omega V}{cV}.$$

**У к а з а н и е.** Перейти в систему координат, связанную с движущимся зеркалом, и воспользоваться законом отражения электромагнитной волны от неподвижной плоской границы, чтобы найти параметры отраженной волны. Определив отраженную волну в движущейся координатной системе, вновь вернуться в лабораторную систему координат, воспользовавшись формулами преобразования (V. 28)–(V. 31) напряженностей электрического и магнитного полей отраженной волны.

$$444. \omega' = \omega \frac{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

$$445. F = \frac{a^2 E_0^2}{4} \frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}} \frac{k}{k}.$$

## § 2. Излучение быстро движущегося заряда

$$446. A(r, t) =$$

$$= \frac{e}{cr} \left( \mathbf{v} + (n\mathbf{v}) \frac{\mathbf{v}}{c} + (nr_e) \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} + 2(nr_e)(n\mathbf{v}) \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c^2} + \right.$$

$$\left. + (nr_e)(n\dot{\mathbf{v}}) \frac{\mathbf{v}}{c^2} + (n\mathbf{v})^2 \frac{\mathbf{v}}{c^2} + \frac{1}{2}(nr_e)^2 \frac{\ddot{\mathbf{v}}}{c^2} \right),$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}).$$

Здесь радиус-вектор  $\mathbf{r}_e$  и скорость  $\mathbf{v}$  заряда берутся в момент времени  $t - r/c$ , где  $r$  — расстояние от фиксированной внутренней точки области движения заряда до точки наблюдения ( $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ).

447. Ответ представлен формулами (V. 44) и (V. 45).

У к а з а н и е. Поскольку потенциалы Лиенара — Вихерта зависят явно от запаздывающего момента времени  $t'$ , необходимо заранее вычислить производные от этой величины по переменным  $x, y, z$  и  $t$ . Для этого дифференцируют обе части равенства  $R(t') = c(t - t')$  по времени наблюдения  $t$ :

$$\frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left( 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Величину  $\partial R / \partial t'$  определяют дифференцированием тождества  $R^2 = \mathbf{R}^2$  с учетом соотношения  $\partial \mathbf{R}(t') / \partial t' = -\mathbf{v}(t')$ , что дает

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R}. \quad (2)$$

Подставляя найденное выражение (2) в формулу (1), получают полезное равенство

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{Rc}}. \quad (3)$$

Аналогично вычисляют  $\text{grad } t'$  путем дифференцирования обеих частей равенства  $R(t') = c(t - t')$  по координатам  $x, y$  и  $z$  точки наблюдения

$$\text{grad } R(t') = -c \text{ grad } t'. \quad (4)$$

С другой стороны, рассматривая величину  $R(t')$  как расстояние между двумя точками  $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|$ , можно написать

$$\text{grad } R(t') = \frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{\partial R}{\partial t'} \text{ grad } t'. \quad (5)$$

Приравняв правые части равенств (4) и (5), находят еще одно необходимое соотношение

$$\text{grad } t' = -\frac{\mathbf{R}}{c \left( R - \frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{c} \right)}. \quad (6)$$

Полученные формулы (3) и (6) значительно облегчают вычисление напряженностей полей (V. 44) и (V. 45).

448. Ответ представлен формулами (V. 48) и (V. 49).

449.  $I = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3} \frac{1 + \frac{1}{5} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4}$ . В ультрарелятивистском случае

$$I = \frac{4e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{5c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4}.$$

При  $v^2 \ll c^2$

$$I = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \left( 1 + \frac{21}{5} \frac{v^2}{c^2} \right),$$

где квадрат ускорения  $\dot{v}^2$  также содержит малые слагаемые порядка  $v^2/c^2$ . Например, в случае движения заряда  $e$  в однородном постоянном электрическом поле с напряженностью  $E$  последняя формула принимает вид

$$I = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3} \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{v^2}{c^2} \right).$$

**450.** Энергия частицы тратится на излучение  $-d\mathcal{E}_\pi = d\mathcal{E}_{\text{изл}}$ . При помощи формул (V.48) и (V.51) находим энергетические потери частицы за время  $dt'$ :

$$-d\mathcal{E}_\pi = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} dt' \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos x\right)^5} dx.$$

Интеграл следует дважды брать по частям, каждый раз дифференцируя числитель подынтегрального выражения,

$$-d\mathcal{E}_\pi = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} dt'.$$

Используя уравнение движения (V.17) и формулы (V.16) и (V.18), определяем квадрат ускорения частицы, скорость которой параллельна вектору  $E$ :

$$\dot{v}^2 = \frac{e^2 E^2}{m^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^3.$$

После этого скорость потери энергии частицей на излучение, вычисленная на основе формул (V.48) и (V.51), принимает вид

$$\left( -\frac{d\mathcal{E}_\pi}{dt'} \right)_{\text{изл}} = \frac{2e^4 E^2}{3m^2 c^3},$$

что совпадает с выражением, полученным из другой формулы (V.58) для заряженной частицы, движущейся параллельно напряженности электрического поля.

**451.** Интенсивность излучения

$$I = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \frac{E^2 - \frac{1}{c^2} (vE)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  — скорость электрона в момент времени  $t$ . Выбираем в качестве осей  $X$  и  $Y$  направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{v}(0)$ . Тогда

$$\frac{E^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{vE})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 [(mc^2)^2 + c^2 p_y^2],$$

где  $p_y$  — проекция импульса электрона на направление его начальной скорости  $\mathbf{v}(0)$ .

Поскольку излученная энергия мала по сравнению с кинетической, обратное влияние поля излучения на движение электрона можно не учитывать. Согласно уравнению движения (V. 17) величина  $p_y$  в этом случае сохраняет постоянное значение, определяемое начальным условием, поэтому

$$(mc^2)^2 + c^2 p_y^2 = \mathcal{E}_0^2.$$

Следовательно, интенсивность излучения электрона постоянна, а излученная энергия пропорциональна времени:

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^4 E^2 \mathcal{E}_0^2}{3m^4 c^7} t.$$

$$452. \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{4 |e|^3 v_0 E}{3mc^2 \sqrt{c^2 - v_0^2}}.$$

$$453. \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^3 \Phi}{3m^2 c^4 l} (\sqrt{(e\Phi + \mathcal{E}_0)^2 - (mc^2)^2} - c p_0),$$

где введены обозначения:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad p_0 = \mathcal{E}_0 \frac{v_0}{c^2}.$$

$$454. \text{ а) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{\pi e^3 v^2 H}{mc^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{H_1}};$$

$$\text{ б) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{\pi e^3 v^2 H}{3mc^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

где предположено, что излученная энергия пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией частицы.

455. Энергия  $\mathcal{E}$  электрона расходуется на излучение, поэтому

$$-d\mathcal{E} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^5} \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (1)$$

где  $v$  — абсолютная величина скорости электрона. При помощи формулы (V. 12) выразим скорость через энергию  $\mathcal{E}$ . После этого соотношение (1) запишется как

$$\frac{d\mathcal{E}}{(mc^2)^2 - \mathcal{E}^2} = \frac{2e^4 H^2}{3m^4 c^7} dt. \quad (2)$$

Интегрируя обе части равенства (2) с учетом начальных условий, получаем

$$\text{Ar th } \frac{\mathcal{E}}{mc^2} - \text{Ar th } \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} = \frac{2e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}.$$

Воспользуемся известной формулой тригонометрии

$$\text{th } (\alpha - \beta) = \frac{\text{th } \alpha - \text{th } \beta}{1 - \text{th } \alpha \text{th } \beta}$$

и представим энергию как явную функцию времени

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{\mathcal{E}_0 + mc^2 \text{th } \frac{2e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}}{mc^2 + \mathcal{E}_0 \text{th } \frac{2e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}}.$$

В случае малой начальной скорости  $v_0^2 \ll c^2$  имеем

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{mv_0^2}{2} e^{-\frac{4e^4 H^2 t}{3m^3 c^5}}.$$

456.  $I = \frac{8e^2 J^2 v^2}{3m^2 c^7 r^2} \left( e \pm \frac{d}{r} \right)^2$ , где знаки  $+$  и  $-$  отвечают двум направлениям дипольного момента — в сторону тока и от него.

457. Полная излученная энергия

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{E})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

где  $\mathbf{E} = \frac{Z|e|\mathbf{r}}{r^3}$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор электрона и  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_0$ .

Пусть траектория электрона параллельна оси  $X$  и пересекает ось  $Y$  в момент времени  $t = 0$  (см. рис. 10). В этом случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ E^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathbf{E})^2 \right] dt = \frac{2Z^2 e^2}{v_0} \left[ \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{dx}{r^4} + \frac{l^2 v_0^2}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{r^6} \right],$$

где  $r^2 = l^2 + x^2$ . Первый интеграл вычисляется непосредственно

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{r^4} = \frac{\pi}{4l^3}. \quad (1)$$

Второй интеграл, содержащий в знаменателе подынтегрального выражения  $r$  в более высокой степени, вычисляется путем дифференцирования обеих частей равенства (1) по параметру  $l$ . Окончательно получаем

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{\pi}{12} \frac{Z^2 e^6}{m^2 l^3 v_0 c^3} \frac{4c^2 - v_0^2}{c^2 - v_0^2}.$$

$$458. \quad \text{а) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{\pi}{4} \frac{e^4 d^2}{m^2 l^5 v_0 c (c^2 - v_0^2)};$$

$$\text{б) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{3\pi}{8} \frac{e^4 d^2}{m^2 l^5 v_0 c (c^2 - v_0^2)} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{c^2}\right).$$

$$459. \quad P_{\text{изл}} = \frac{\pi}{8} \frac{e^4 d^2}{m^2 l^5 c^3 (c^2 - v_0^2)} \left(7 - \frac{15}{8} \frac{v_0^2}{c^2}\right).$$

$$460. \quad \text{а) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{\pi}{4} \frac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^5 c^3 (c^2 - v_0^2)};$$

$$\text{б) } \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{15\pi}{64} \frac{e^4 \mu^2 v_0}{m^2 l^5 c^3 (c^2 - v_0^2)}.$$

$$461. \quad P_{\text{изл}} = \frac{41\pi}{64} \frac{e^4 \mu^2 v_0^2}{m^2 l^5 c^5 (c^2 - v_0^2)}.$$

$$462. \quad \mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{4\pi e^4 J^2 v}{3m^2 c^5 l (c^2 - v_0^2)}.$$

$$463. \quad \frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \frac{2e^4 E^2 t}{3m^4 c^7}.$$

464.  $\frac{1}{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mathcal{E}_0} + \frac{2e^4 \mathbf{H}_{\perp}^2 t}{3m^4 c^7}$ , где  $\mathbf{H}_{\perp}$  — составляющая вектора  $\mathbf{H}$ , перпендикулярная скорости ультрарелятивистской частицы.

465. При помощи формул (V.12) и (V.16) — (V.18) получаем

$$\frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} = \frac{\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}))}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \quad (1)$$

$$\frac{\mathbf{vF}}{m} = \frac{\dot{\mathcal{E}}}{mc} = \frac{\frac{\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (2)$$

Составляем разность квадратов величин (1) и (2). После введения в квадрат суммы (1) делаем циклическую перестановку сомножителей, а также пользуемся ортогональностью векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}$ . Дальнейшее преобразование полученной общей суммы приводит к результату

$$\frac{1}{m^2} \left[ \mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{vF})^2 \right] = \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}.$$

Окончательно

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\Pi}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}.$$

Это соотношение можно также получить иначе, выразив предварительно правую часть исходного равенства (V.58) через квадрат четырехмерного ускорения (V.21)

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\Pi}}{dt} = \frac{2e^2 c}{3} \omega_i^2.$$

Раскрывая квадрат 4-ускорения, вновь приходим к искомому соотношению.

$$466. d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left( \frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right) d\omega.$$

467. Разложим экспоненту в ряд и сохраним первые три слагаемые

$$\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega \frac{\mathbf{nr}_e}{c}} = \dot{\mathbf{r}}_e - \frac{i\omega}{c} \dot{\mathbf{r}}_e (\mathbf{nr}_e) + \frac{(i\omega)^2}{2c^2} \dot{\mathbf{r}}_e (\mathbf{nr}_e)^2.$$

Воспользуемся соотношением

$$2\dot{\mathbf{r}}_e (\mathbf{nr}_e) = (\mathbf{r}_e \times \dot{\mathbf{r}}_e) \times \mathbf{n} + \frac{d}{dt} \mathbf{r}_e (\mathbf{r}_e \mathbf{n})$$

и перепишем полученную сумму в новых обозначениях

$$\dot{\mathbf{r}}_e e^{-i\omega \frac{\mathbf{nr}_e}{c}} = \dot{\mathbf{d}} - i\omega (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}) - \frac{i\omega}{6c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{e}{2} \left( \frac{i\omega}{c} \right)^2 (\mathbf{nr}_e)^2 \mathbf{v},$$

где  $D_{\alpha} = D_{\alpha\beta} n_{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  — магнитный момент, а  $D_{\alpha\beta}$  — тензор квадрупольного момента заряда.

Будем считать, что для компонент Фурье  $f(\omega)$  и  $\dot{f}(\omega)$  каждой рассматриваемой здесь функции  $f(t)$  и ее производной  $\dot{f}(t)$  справедливо соотношение

$$-i\omega f(\omega) = \dot{f}(\omega).$$

Тогда исходная формула (V.60) в заданном приближении примет вид

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left| \ddot{\mathbf{d}}(\omega) \times \mathbf{n} + (\ddot{\mathbf{\mu}}(\omega) \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{D}}(\omega) \times \mathbf{n} + \mathbf{Q}(\omega) \times \mathbf{n} \right|^2 d\Omega d\omega,$$

где ради краткости обозначено

$$\mathbf{Q}(\omega) = \frac{e}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^3 (\mathbf{n} \mathbf{r}_e)^2 \mathbf{v} e^{i\omega t} dt.$$

После интегрирования по углам находим спектральный состав излучения с учетом членов порядка  $v^2/c^2$ :

$$d\mathcal{E}_{\omega} = \left\{ \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{2|\ddot{\mathbf{\mu}}(\omega)|^2}{3\pi c^3} + \frac{|\ddot{D}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{180\pi c^5} + \right. \\ \left. + \frac{e}{15\pi c^5} \left[ \ddot{\mathbf{d}}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^3}{dt^3} (2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v}) \mathbf{r}_e) dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \ddot{\mathbf{d}}^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d^3}{dt^3} (2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v}) \mathbf{r}_e) dt \right] \right\} d\omega.$$

Если проинтегрировать по частоте  $\omega$ , то получим полную излученную энергию

$$\mathcal{E}_{\text{изл}} = \int_{-\infty}^{\infty} I dt,$$

где интенсивность излучения имеет вид

$$I = \frac{2\dot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} + \frac{2\dot{\mathbf{\mu}}^2}{3c^3} + \frac{\ddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5} + \frac{2e}{15c^5} \ddot{\mathbf{d}} \frac{d^3}{dt^3} [2r_e^2 \mathbf{v} - (\mathbf{r}_e \mathbf{v}) \mathbf{r}_e].$$

468. В общей формуле (V.64) положим

$$\mathbf{r}_e(t) = l_z \mathbf{a} \cos \omega_0 t, \quad \mathbf{n} \mathbf{r}_e(t) = a \cos \theta \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 t = \varphi,$$

где  $\theta$  — угол между осью  $Z$  и направлением излучения. После этого средняя по времени интенсивность излучения в элемент телесного угла на  $n$ -й гармонике запишется:

$$dI = \frac{n^2 e^2 a^2 \omega_0^4}{2\pi c^3} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(n\varphi - \frac{na\omega_0}{c} \cos \theta \cos \varphi\right)} \sin \varphi d\varphi \right|^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$



Возникший интеграл представим в виде суммы двух

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)} \sin \varphi \, d\varphi = \\ = -\frac{i}{2\pi x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)} i (n + x \sin \varphi) \, d\varphi - \\ - \frac{n}{2\pi x} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)} \, d\varphi. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю в силу периодичности подынтегральной функции с периодом  $2\pi$ , а второй выражается через функцию Бесселя целочисленного порядка  $n$ :

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi + x \cos \varphi)} \, d\varphi.$$

Окончательно находим

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 \omega_0^2}{2\pi c} \operatorname{tg}^2 \theta J_n^2 \left( \frac{n\omega_0 a}{c} \cos \vartheta \right) d\Omega.$$

**469.** Выберем оси  $X$  и  $Y$  в плоскости окружности, а ось  $Z$  совместим с осью вращения. Компоненты радиус-вектора заряда и единичного вектора направления излучения запишутся

$$\begin{aligned} x_e = R \cos \omega_0 t, \quad y_e = R \sin \omega_0 t, \quad z_e = 0, \\ n_1 = \sin \theta \cos \psi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \psi, \quad n_3 = \cos \theta. \end{aligned}$$

В результате усреднения по времени интенсивность излучения в элемент телесного угла в данной задаче становится аксиально-симметричной и не зависящей от угла  $\psi$ . Поэтому для упрощения возникающих соотношений с самого начала положим  $\psi = 0$  в исходной формуле (V. 64). Принимая во внимание

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{r}_e(t) = -R\omega_0 (I_x \cos \theta \cos \varphi + I_y \cos \theta \sin \varphi - I_z \sin \theta \cos \varphi), \\ n r_e(t) = R \sin \theta \cos \varphi, \quad \varphi = \omega_0 t, \end{aligned}$$

получаем для средней по времени интенсивности излучения в элемент телесного угла на  $n$ -й гармонике следующее выражение:

$$\begin{aligned} dI_n = \frac{n^2 e^2 R^2 \omega_0^4}{2\pi c^3} \left( \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \left( n\varphi - \frac{nv}{c} \sin \theta \cos \varphi \right)} \cos \varphi \, d\varphi \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i \left( n\varphi - \frac{nv}{c} \sin \theta \cos \varphi \right)} \sin \varphi \, d\varphi \right|^2 \cos^2 \theta \right) d\Omega. \quad (1) \end{aligned}$$

Воспользуемся интегральным представлением функции Бесселя целочисленного порядка  $n$ . Тогда первый из интегралов правой части равенства (1) выразится через производную от функции Бесселя, а второй — через саму функцию Бесселя, как и в предыдущей задаче. После простых вычислений находим

$$dI_n = \frac{n^2 e^2 v^2}{2\pi R^2 c} \left[ \operatorname{ctg}^2 \theta J_n^2 \left( \frac{nv}{c} \sin \theta \right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2 \left( \frac{nv}{c} \sin \theta \right) \right] d\Omega.$$

470.

$$dI_n = \frac{n^2 \omega_0^2}{2\pi c} \operatorname{tg}^2 \theta \left[ e_1 J_n \left( \frac{na_1 \omega_0}{c} \cos \theta \right) + e_2 J_n \left( \frac{na_2 \omega_0}{c} \cos \theta \right) \right]^2 d\Omega,$$

где  $\theta$  — угол между осью  $Z$  и направлением излучения.

$$471. \mathcal{E}_{\text{кр}} = 4 \left( \frac{m^2 c^4 l}{Q e^2} \right)^2 \frac{l}{\pi}.$$

$$472. \mathcal{E}_{\text{кр}} = 4 \left( \frac{m^2 c^4 l^2}{e^2 \mu} \right)^2 \frac{l}{\pi}.$$

$$473. \mathcal{E}_{\text{кр}} = \frac{64}{15} \left( \frac{m^2 c^4 l^2}{e^2 d} \right)^2 \frac{l}{\pi}.$$

$$474. \mathcal{E}_{\text{кр}} = \frac{3}{4} \left( \frac{m^2 c^4}{e^2 q} \right)^2 \frac{l}{\pi}.$$

$$475. \mathcal{E}_{\text{кр}} = \frac{3}{4} \left( \frac{m^2 c^5}{e^2 J} \right)^2 \frac{l}{\pi}.$$

## Приложение 1

### ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Скалярное и векторное произведения векторов:

$$\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha = AB \cos(\widehat{\mathbf{AB}}), \quad (\text{П1.1})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i}_x + \\ + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{i}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i}_z, \quad (\text{П1.2})$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin(\widehat{\mathbf{AB}}). \quad (\text{П1.3})$$

Смешанное и двойное векторное произведения векторов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}, \quad (\text{П1.4})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB}). \quad (\text{П1.5})$$

Дифференциальный оператор набла

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{П1.6})$$

Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.7})$$

Градиент функции  $\varphi$ :

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{i}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{П1.8})$$

Интегральные соотношения, содержащие градиент функции:

$$\oint_S \varphi d\mathbf{S} = \int_V \text{grad } \varphi dV, \quad (\text{П1.9})$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ ;

$$\oint_L \varphi d\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi) dS, \quad (\text{П1.10})$$

где  $S$  — произвольная поверхность, натянутая на замкнутый контур  $L$ . Нормаль  $\mathbf{n}$  к этой поверхности обращена в ту сторону, куда ввинчивается правый винт при вращении в направлении обхода контура  $L$ .

Производная от скалярной функции  $\varphi$  в направлении орта  $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \text{ grad } \varphi. \quad (\text{П1.11})$$

Производная от вектора  $\mathbf{B}$  в направлении орта  $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{n}} = (\mathbf{n} \text{ grad}) \mathbf{B} \equiv (\mathbf{n} \nabla) \mathbf{B}. \quad (\text{П1.12})$$

Производная от вектора  $\mathbf{B}$  в направлении вектора  $\mathbf{A}$ , умноженная на модуль  $|\mathbf{A}|$  этого вектора,

$$(\mathbf{A} \text{ grad}) \mathbf{B} \equiv (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} = A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad (\text{П1.13})$$

Дивергенция вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (\text{П1.14})$$

Теорема Гаусса — Остроградского

$$\oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV, \quad (\text{П1.15})$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ .  
Ротор вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = & \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \\ & + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z. \quad (\text{П1.16}) \end{aligned}$$

## Теорема Стокса

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}, \quad (\text{П1.17})$$

где  $S$  — произвольная поверхность, натянутая на замкнутый контур  $L$ . Нормаль к этой поверхности обращена в ту сторону, куда ввинчивается правый винт при вращении в направлении обхода контура  $L$ .

Часто встречающиеся интегральные соотношения:

$$\oint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dV, \quad (\text{П1.18})$$

$$\oint_S \operatorname{grad} \varphi d\mathbf{S} = \int_V \nabla^2 \varphi dV, \quad (\text{П1.19})$$

в которых  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к этой поверхности.

Формулы Грина

$$\oint_S \varphi \operatorname{grad} \psi d\mathbf{S} = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) dV, \quad (\text{П1.20})$$

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) dS, \quad (\text{П1.21})$$

где  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая объем  $V$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к этой поверхности.

Ротор градиента

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (\text{П1.22})$$

Ротор от ротора

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{П1.23})$$

Дивергенция ротора

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{П1.24})$$

Дивергенция градиента

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi. \quad (\text{П1.25})$$

Производные от произведений:

$$\text{grad}(\varphi\Phi) = \varphi \text{grad} \Phi + \Phi \text{grad} \varphi, \quad (\text{П1.26})$$

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = & (\mathbf{A} \text{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \text{grad}) \mathbf{A} + \\ & + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

$$\text{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{grad} \varphi, \quad (\text{П1.28})$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{B}, \quad (\text{П1.29})$$

$$\text{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \text{rot} \mathbf{A} + \text{grad} \varphi \times \mathbf{A}, \quad (\text{П1.30})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = & (\mathbf{B} \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \text{grad}) \mathbf{B} - \\ & - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{П1.31})$$

Производные от некоторых сложных функций:

$$\text{grad}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = -\text{grad}'|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (\text{П1.32})$$

$$\text{grad} F(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \text{grad} \varphi, \quad (\text{П1.33})$$

$$\text{div} \mathbf{A}(\varphi) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi} \text{grad} \varphi, \quad (\text{П1.34})$$

$$\text{rot} \mathbf{A}(\varphi) = \text{grad} \varphi \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \varphi}, \quad (\text{П1.35})$$

$$(\mathbf{A} \text{grad}) \mathbf{B}(\varphi) = (\mathbf{A} \text{grad} \varphi) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \varphi}. \quad (\text{П1.36})$$

Выражения градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \quad z = z,$$

$$\text{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{l}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \mathbf{l}_\psi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{l}_z, \quad (\text{П1.37})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (\text{П1.38})$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} = & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right) \mathbf{l}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{l}_\psi + \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right) \mathbf{l}_z, \end{aligned} \quad (\text{П1.39})$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (\text{П1.40})$$

$$\nabla^2 F(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right), \quad (\text{П1.41})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} =$$

$$= \left( \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right) \mathbf{l}_r + \\ + \left( \nabla^2 A_\psi - \frac{A_\psi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right) \mathbf{l}_\psi + \nabla^2 A_z \mathbf{l}_z. \quad (\text{П1.42})$$

Выражения градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа в сферической системе координат:

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{l}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{l}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \mathbf{l}_\psi, \quad (\text{П1.43})$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}, \quad (\text{П1.44})$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\psi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right] \mathbf{l}_r + \\ + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\psi) \right] \mathbf{l}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{l}_\psi, \quad (\text{П1.45})$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}, \quad (\text{П1.46})$$

$$\nabla^2 F(r) = \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rF), \quad (\text{П1.47})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} =$$

$$= \left\{ \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \left[ A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right] \right\} \mathbf{l}_r + \\ + \left[ \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} \right) \right] \mathbf{l}_\theta + \\ + \left[ \nabla^2 A_\psi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial A_r}{\partial \psi} + \text{ctg } \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} - \frac{A_\psi}{2 \sin \theta} \right) \right] \mathbf{l}_\psi. \quad (\text{П1.48})$$

## МАТРИЦЫ И ТЕНЗОРЫ

Совокупность чисел  $a_{\alpha\beta}$ , представленных в виде таблицы,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \hat{a} \quad (\text{П2.1})$$

называется матрицей  $\hat{a}$ , а сами числа  $a_{\alpha\beta}$  — матричными элементами. Если число матричных элементов в каждой строке и столбце одинаково, она называется квадратной.

При сложении матриц  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  складываются их одноименные матричные элементы, так что матрица  $\hat{c}$  суммы

$$\hat{c} = \hat{a} + \hat{b} \quad (\text{П2.2})$$

имеет следующие матричные элементы:

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}. \quad (\text{П2.3})$$

Произведением  $\hat{a}\hat{b}$  матриц  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  называется такая матрица  $\hat{c}$ , матричные элементы которой определяются как

$$c_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}. \quad (\text{П2.4})$$

Обычно  $\hat{a}\hat{b} \neq \hat{b}\hat{a}$ . Если  $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$ , то матрицы называются коммутирующими.

Множитель  $c$ , общий у всех матричных элементов, можно вынести за знак матрицы

$$\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.5})$$

Матричные элементы единичной матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{П2.6})$$

обозначаются символом Кронекера

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{П2.7})$$

Исходная матрица  $\hat{a}$  не меняется при умножении на единичную  $\hat{a}\hat{I} = \hat{I}\hat{a} = \hat{a}$ .



Если определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\hat{a}| \quad (\text{П2.8})$$

матрицы  $\hat{a}$  отличен от нуля, то существует обратная матрица  $\hat{a}^{-1}$  такая, что

$$\hat{a}^{-1}\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^{-1} = \hat{I}, \quad (\text{П2.9})$$

$$a_{\alpha\gamma}^{-1}a_{\gamma\beta} = a_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{П2.10})$$

Матричные элементы обратной матрицы  $\hat{a}^{-1}$  имеют вид

$$a_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{A_{\beta\alpha}}{|\hat{a}|}, \quad (\text{П2.11})$$

где  $A_{\beta\alpha}$  — алгебраическое дополнение (адьюнкта) элемента  $a_{\beta\alpha}$  определителя матрицы (П2.8).

Матрица  $\hat{a}^T$ , которая получается из исходной  $\hat{a}$  путем замены строк на столбцы, называется транспонированной

$$a_{\alpha\beta}^T = a_{\beta\alpha}. \quad (\text{П2.12})$$

Симметричная  $\hat{s}$  и антисимметричная  $\hat{a}$  матрицы обладают свойствами:

$$s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}, \quad (\text{П2.13})$$

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}. \quad (\text{П2.14})$$

Произвольную квадратную матрицу  $\hat{b}$  можно разложить на сумму симметричной и антисимметричной

$$\hat{b} = \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{b}^T) + \frac{1}{2}(\hat{b} - \hat{b}^T) \quad (\text{П2.15})$$

или иначе

$$b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta} + b_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha}). \quad (\text{П2.16})$$

Диагональная матрица определяется выражением

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{П2.17})$$

Компоненты  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  радиус-вектора в трехмерном евклидовом пространстве при переходе из координатной системы  $XYZ$  в повернутую систему координат  $X'Y'Z'$  преобразуются по формуле

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta}x_\beta. \quad (\text{П2.18})$$

где  $x'_1$ ,  $x'_2$  и  $x'_3$  — компоненты того же радиус-вектора в повернутой системе координат, а коэффициенты  $a_{\alpha\beta}$  представляют собой косинусы углов между  $\beta$ -й осью исходной и  $\alpha$ -й осью повернутой декартовых систем координат. Совокупность коэффициентов  $a_{\alpha\beta}$  составляет матрицу линейного преобразования координат при переходе из исходной в повернутую координатную систему. Обратный переход осуществляется при помощи обратной матрицы (П2.11).

Линейное преобразование координат вида (П2.18) называется ортогональным, если коэффициенты  $a_{\alpha\beta}$  удовлетворяют условию  $a_{\alpha\beta}^{-1} = a_{\beta\alpha}$ . Примером линейного ортогонального преобразования координат служит переход из одной декартовой системы координат в любую повернутую.

Вектором  $A_\beta$  называется совокупность трех величин  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , которые при ортогональном преобразовании координат преобразуются как компоненты радиус-вектора \*)

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (\text{П2.19})$$

где три величины  $A'_1$ ,  $A'_2$  и  $A'_3$  представляют собой компоненты того же вектора в штрихованной системе координат.

Тензором второго ранга называется совокупность девяти величин  $T_{\gamma\delta}$ , которые при ортогональном преобразовании координат преобразуются как произведение компонент радиус-вектора

$$T'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} T_{\gamma\delta}, \quad (\text{П2.20})$$

где  $T'_{\alpha\beta}$  — компоненты того же тензора в штрихованной координатной системе.

Аналогично определяется тензор  $n$ -го ранга, у которого величины  $T_{\alpha\beta\gamma\dots}$  имеют  $n$  индексов. В частности, для  $n = 3$  имеем

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\delta} a_{\beta\sigma} a_{\gamma\rho} T_{\delta\sigma\rho}. \quad (\text{П2.21})$$

После введения понятия тензора обычный вектор (П2.19) можно рассматривать как тензор первого ранга.

---

\*) Рассматриваются только ортонормированные базисы трехмерного евклидова пространства, поэтому нет необходимости вводить ковариантные и контравариантные компоненты вектора.

Величина, которая не меняет своего численного значения при поворотах координатной системы, называется скаляром или тензором нулевого ранга. Примером скаляра служит скалярное произведение векторов.

Наряду с поворотом координатной системы существует еще одно ортогональное преобразование координат, заключающееся в одновременном изменении знака всех координат (инверсия). Это есть не что иное, как переход в левую координатную систему, все оси которой направлены в противоположную сторону по отношению к исходной.

Если скаляр и вектор меняет знак при инверсии, то они называются соответственно псевдоскаляром и полярным вектором, а при сохранении знака — истинным скаляром и аксиальным вектором.

Истинный тензор  $n$ -го ранга при инверсии умножается на  $(-1)^n$ , а псевдотензор умножается на  $(-1)^{n+1}$ .

Все сказанное о сложении и умножении матриц (П2.2) — (П2.11) относится также к тензорам второго ранга. Остаются в силе и определения (П2.13) — (П2.17) для симметричного, антисимметричного и диагонального тензоров.

Тензор  $T_{\alpha\beta}^s T_{\beta\gamma}^a$ , полученный при скалярном умножении симметричного тензора  $T_{\alpha\beta}^s$  на антисимметричный  $T_{\beta\gamma}^a$ , имеет важное свойство

$$T_{\alpha\beta}^s T_{\beta\alpha}^a = 0. \quad (\text{П2.22})$$

Сумма диагональных компонент  $T_{\alpha\alpha}$  тензора  $T_{\alpha\beta}$  называется его следом. След тензора является скаляром. И вообще при свертывании тензора  $T_{\alpha\beta\gamma\delta\dots}$  по любым двум его индексам, например  $T_{\alpha\alpha\gamma\delta\dots}$ , получается новый тензор, ранг которого на две единицы меньше.

В результате скалярного умножения тензора  $T_{\alpha\beta}$  на вектор  $A_\beta$  получается другой вектор

$$B_\alpha = T_{\alpha\beta} A_\beta. \quad (\text{П2.23})$$

Совершенно антисимметричным единичным псевдотензором третьего ранга называется совокупность 27 величин  $e_{\alpha\beta\gamma}$ , меняющих знак при перестановке любых двух индексов. Отличны от нуля лишь те компоненты этого тензора, у которых индексы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  различны. При этом  $e_{123} = 1$ , а остальные отличные от нуля компоненты равны 1 или  $-1$ , смотря по тому, четно или нечетно

число перестановок, которые приводят данную последовательность чисел  $\alpha\beta\gamma$  к последовательности 123. Тензор  $e_{\alpha\beta\gamma}$ , как и единичный тензор  $\delta_{\alpha\beta}$ , выделены среди других тем, что имеют один и тот же вид во всех декартовых системах координат.

При помощи тензора  $e_{\alpha\beta\gamma}$  векторное произведение векторов можно записать в виде

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_{\alpha} = e_{\alpha\beta\gamma} a_{\beta} b_{\gamma}. \quad (\text{П2.24})$$

Полезны также следующие формулы:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} &= 6, \\ e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\beta\gamma} &= 2\delta_{\alpha\lambda}, \\ e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\gamma} &= \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda}, \\ e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu} &= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

где правая часть последнего равенства представляет собой определитель, составленный из символов Кронекера (П2.7).

### Приложение 3

#### $\delta$ -ФУНКЦИЯ

$\delta$ -функцией (дельта-функцией) называется такая функция  $\delta(x - x_0)$ , которая равна нулю всюду, кроме особой точки  $x = x_0$ , где она обращается в бесконечность так, что интеграл от этой функции по произвольному промежутку, содержащему внутри себя точку  $x_0$ , равен единице:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0, \\ \infty & \text{при } x = x_0; \end{cases} \quad (\text{П3.1})$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \text{при } a < x_0 < b. \quad (\text{П3.2})$$

Важнейшие свойства  $\delta$ -функции выражаются равенствами:

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{при } a < x_0 < b, \\ 0 & \text{при } x_0 < a \text{ или } b < x_0, \end{cases} \quad (\text{ПЗ.3})$$

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0), \quad (\text{ПЗ.4})$$

$$\int_a^b \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) dx = \delta(x_1 - x_2) \text{ при } a < x_1 < b$$

или  $a < x_2 < b$ , (ПЗ.5)

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{ПЗ.6})$$

$$x \delta(x) = 0, \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$|x| \delta(x^2 - \varepsilon) = \delta(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad (\text{ПЗ.8})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (\text{ПЗ.9})$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\left| \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_n} \right|} \delta(x - x_n), \quad (\text{ПЗ.11})$$

где величины  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) суть простые корни уравнения  $f(x) = 0$ , в котором  $f(x)$  является однозначной дифференцируемой функцией. В формулах (ПЗ.3) и (ПЗ.4) функция  $f(x)$  непрерывна. Приведенные соотношения (ПЗ.4) — (ПЗ.11) следует понимать в том смысле, что интеграл от обеих частей написанных равенств имеет одно и то же значение.

Поскольку  $\delta(x)$  является четной функцией, то из соотношений (ПЗ.2) и (ПЗ.3) при  $a = -b < 0$  и  $x_0 = 0$  следуют равенства

$$\int_0^b \delta(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (\text{ПЗ.12})$$

$$\int_0^b f(x) \delta(x) dx = \frac{1}{2} f(0). \quad (\text{ПЗ.13})$$

Вычисление интеграла, содержащего производную  $\frac{d}{dx} \delta(x - x_0)$  от  $\delta$ -функции, проводится интегрированием

по частям:

$$\int_a^b f(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) dx = - \left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}, \quad (\text{ПЗ.14})$$

где  $a < x_0 < b$ . Важный частный случай этой формулы иногда записывают так:

$$x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x). \quad (\text{ПЗ.15})$$

Аналогично вычисляется интеграл, содержащий производные высших порядков от  $\delta$ -функции,

$$\int_a^b f(x) \frac{d^n}{dx^n} \delta(x - x_0) dx = (-1)^n \left( \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0}. \quad (\text{ПЗ.16})$$

Существуют различные аналитические представления  $\delta$ -функции. Наиболее распространенные из них имеют следующий вид:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin Lx}{L}, \quad (\text{ПЗ.17})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 Lx}{Lx^2}, \quad (\text{ПЗ.18})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\gamma^2 + x^2}, \quad (\text{ПЗ.19})$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu e^{-\mu^2 x^2}. \quad (\text{ПЗ.20})$$

Если  $\delta$ -функции (ПЗ.17)–(ПЗ.20) стоят под знаком интеграла, то предельный переход осуществляется после взятия этого интеграла.

$\delta$ -функцию можно также получить путем дифференцирования ступенчатой функции

$$\eta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases} \quad (\text{ПЗ.21})$$

а именно:

$$\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \eta(x - x_0). \quad (\text{ПЗ.22})$$

В связи с этим производную от разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } x < x_0, \\ f_2(x) & \text{при } x > x_0, \end{cases} \quad (\text{П3.23})$$

$$f_2(x_0) - f_1(x_0) = h$$

часто записывают в виде

$$\frac{df(x)}{dx} = h\delta(x - x_0) + \begin{cases} \frac{df_1(x)}{dx} & \text{при } x < x_0, \\ \frac{df_2(x)}{dx} & \text{при } x > x_0. \end{cases} \quad (\text{П3.24})$$

Наглядное представление о  $\delta$ -функции и ее основном свойстве (П3.3) можно получить, рассматривая, например, график функции  $\frac{\sin^2 Lx}{\pi Lx^2}$

при большом значении параметра  $L \gg 2\pi$  (рис. 28). Действительно, в этом случае максимум в точке  $x = 0$  является главным. Его высота  $L/\pi$ , а ширина  $2\pi/L$ . По обе стороны от главного максимума функция  $\frac{\sin^2 Lx}{\pi Lx^2}$  имеет бесконечный ряд побочных максимумов с быстро убывающей высотой. Они разделены между собой минимумами в точках  $x = \frac{n\pi}{L}$  ( $n =$

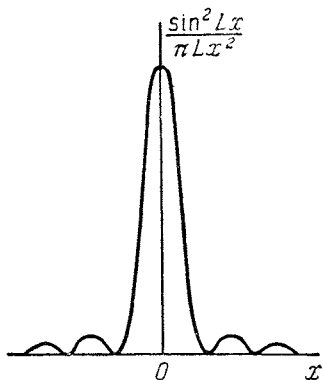


Рис. 28.

$= \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Если параметр  $L$  стремится к бесконечности, то главный максимум беспредельно возрастает и сужается, в то время как побочные максимумы неограниченно уменьшаются. В результате функция  $\frac{\sin^2 Lx}{\pi Lx^2}$  при  $L \rightarrow \infty$  стремится к предельному выражению (П3.1).

Для произвольной непрерывной функции  $f(x)$  при достаточно большом значении параметра  $L$  основная область интегрирования в интеграле

$$\int_a^b f(x) \frac{\sin^2 Lx}{\pi Lx^2} dx \quad \text{при } a < 0 < b$$

совпадает с шириной главного максимума функции  $\frac{\sin^2 Lx}{\pi Lx^2}$ . В подынтегральном выражении непрерывную функцию  $f(x)$  в области главного максимума можно заменить ее значением в точке  $x = 0$ . Такая замена тем точнее, чем больше параметр  $L$  и, следовательно, выше и уже главный максимум. Постоянный множитель  $f(0)$  выносится за знак интеграла, а оставшийся интеграл в пределе  $L \rightarrow \infty$  равен единице. Отсюда получаем основное свойство  $\delta$ -функции (ПЗ.3).

Трехмерная  $\delta$ -функция определяется соотношением

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (\text{ПЗ.25})$$

Основное свойство этой функции выражается равенством

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = f(\mathbf{r}_0), \quad (\text{ПЗ.26})$$

где точка с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$  лежит внутри объема интегрирования  $V$ , в котором задана непрерывная функция  $f(\mathbf{r})$ . Если указанная точка лежит вне объема  $V$ , то интеграл (ПЗ.26) равен нулю.

Трехмерную  $\delta$ -функцию удобно представить в виде трехкратного интеграла в неограниченном  $\mathbf{k}$ -пространстве

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \quad (\text{ПЗ.27})$$

Трехмерная  $\delta$ -функция появляется, например, в результате следующего дифференцирования по компонентам радиус-вектора  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{ПЗ.28})$$

#### Приложение 4

##### ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  являются решениями дифференциального уравнения (см. книги [7—9])

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1) P_n = 0, \quad (\text{П4.1})$$

где  $-1 \leq x \leq 1$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$



Несколько первых полиномов с индексами  $n = 0, 1, 2$  и  $3$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \end{aligned} \quad (\text{П4.2})$$

Полином Лежандра  $n$ -й степени может быть вычислен по формуле

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (\text{П4.3})$$

Полиномы Лежандра обладают следующими свойствами:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (\text{П4.4})$$

$$P_n(1) = 1, \quad (\text{П4.5})$$

$$P_{2k+1}(0) = 0, \quad (\text{П4.6})$$

$$P_{2k}(0) = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}, \quad (\text{П4.7})$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (\text{П4.8})$$

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x) dx = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!}, \quad (\text{П4.9})$$

$$\int_0^1 P_{2k}(x) dx = \delta_{k0}. \quad (\text{П4.10})$$

Если индексы  $n$  и  $m$  одновременно четны или нечетны, то выполняется равенство

$$\int_0^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{1}{2n+1} \delta_{nm}. \quad (\text{П4.11})$$

Для полиномов справедливы рекуррентные формулы:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (\text{П4.12})$$

$$(x^2 - 1)P'_n(x) = n x P_n(x) - n P_{n-1}(x), \quad (\text{П4.13})$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x), \quad (\text{П4.14})$$

где штрих обозначает производную от функции  $P_n(x)$  по аргументу  $x$ .

На отрезке  $[-1, 1]$  полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций. Поэтому произвольную дважды дифференцируемую функцию  $f(x)$ , заданную на этом отрезке, можно разложить в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \quad (\text{П4.15})$$

где

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (\text{П4.16})$$

Часто в качестве аргумента полиномов Лежандра берут  $x = \cos \theta$ . В этом случае в интегралах (П4.8) — (П4.11) и (П4.16) следует сделать замену переменной интегрирования, а уравнение Лежандра (П4.1) принимает вид

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right) + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0. \quad (\text{П4.17})$$

Сравнивая левую часть (П4.17) с оператором Лапласа в сферических координатах (П1.46), получаем при  $r \neq 0$  полезные соотношения

$$\nabla^2 P_n(\cos \theta) = -\frac{n(n+1)}{r^2} P_n(\cos \theta), \quad (\text{П4.18})$$

$$\nabla^2 (r^n P_n(\cos \theta)) = 0, \quad \nabla^2 \left( \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right) = 0. \quad (\text{П4.19})$$

Отсюда следует, что решением уравнения Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  является также сумма полиномов Лежандра с произвольными коэффициентами  $a_n$  и  $b_n$ :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta). \quad (\text{П4.20})$$

# СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции  $Y_{lm}(\theta, \psi)$  определяются формулами \*)

$$Y_{lm}(\theta, \psi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\psi}, \quad (\text{П5.1})$$

где  $-l \leq m \leq l$  и  $l = 0, 1, 2, \dots$ , а  $P_l^m(\cos \theta)$  — присоединенные полиномы Лежандра

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m}. \quad (\text{П5.2})$$

Выпишем первые девять сферических функций:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,\pm 1} = \mp i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\psi}, \quad (\text{П5.3})$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta), \\ Y_{2,\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\psi}, \quad (\text{П5.4}) \\ Y_{2,\pm 2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm i2\psi}.$$

Сферические функции  $Y_{lm}(\theta, \psi)$  являются ограниченными решениями дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dY_{lm}}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) Y_{lm} = 0. \quad (\text{П5.5})$$

Поэтому при действии оператора Лапласа в сферических координатах на функцию  $Y_{lm}(\theta, \psi)$  последняя воспроизводится:

$$\nabla^2 Y_{lm}(\theta, \psi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_{lm}(\theta, \psi), \quad (\text{П5.6})$$

где  $r \neq 0$ .

---

\*) Выбор нормировочного множителя соответствует определению сферической функции, принятому в квантовой механике [10].

Из многочисленных свойств сферических функций отметим лишь те, которые используются в настоящем сборнике\*). Сферические функции ортогональны на поверхности сферы единичного радиуса

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \psi) Y_{l'm'}(\theta, \psi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{П5.7})$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\psi$  — элемент телесного угла. При  $m = 0$  сферическая функция выражается через полином Лежандра

$$Y_{l0} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (\text{П5.8})$$

и не зависит от азимутального угла  $\psi$ . К функциям  $Y_{l0}$  приводят следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta, \psi) d\psi = 2\pi \delta_{0m} Y_{l0}, \quad (\text{П5.9})$$

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \psi) Y_{l'm'}(\theta, \psi) d\psi = 2\pi \delta_{mm'} Y_{l0}^* Y_{l'0}. \quad (\text{П5.10})$$

Для вычисления потенциала крайне полезны следующие разложения по сферическим функциям:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \psi) Y_{lm}(\theta', \psi') \quad (r > r'), \quad (\text{П5.11})$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \psi') Y_{lm}(\theta, \psi) \quad (r' > r), \quad (\text{П5.12})$$

где  $r, \theta$  и  $\psi$  — сферические координаты точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . Штрихом отмечены аналогичные величины, относящиеся к другой точке пространства.

---

\*) Подробные сведения о сферических функциях можно найти в книгах [7, 9].

## Приложение 6

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Цилиндрические функции  $Z_\nu(x)$  являются решениями уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ_\nu}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_\nu = 0, \quad (\text{П6.1})$$

где  $0 \leq x \leq \infty$ , а  $\nu$  — некоторый параметр.

Ограниченное решение  $J_\nu(x)$  уравнения (П6.1) называется функцией Бесселя  $\nu$ -го порядка или цилиндрической функцией первого рода

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (\text{П6.2})$$

где  $\Gamma(s)$  — гамма-функция, которая для  $\text{Re } s > 0$  определяется формулой

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{s-1} d\xi. \quad (\text{П6.3})$$

Основные свойства гамма-функции

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(0) = \infty. \quad (\text{П6.4})$$

Если  $n$  — целое, то из соотношений (П6.4) следует  $\Gamma(n+1) = n!$  и  $\Gamma(-n) = (-1)^n \cdot \infty$ .

Второе линейно-независимое решение уравнения Бесселя обращается в бесконечность в точке  $x = 0$ . Если параметр  $\nu$  не равен целому числу, то таким решением служит или функция  $J_{-\nu}(x)$ , или функция Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}, \quad (\text{П6.5})$$

которую называют также цилиндрической функцией второго рода.

В случае целых значений  $\nu = n$ , а также при  $\nu = 0$  выполняется соотношение  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ , из которого видно, что функции  $J_{-n}(x)$  и  $J_n(x)$  линейно-зависимы. Поэтому при  $\nu = n$  или  $\nu = 0$  в качестве второго

линейно-независимого решения уравнения Бесселя берут функцию Неймана

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}, \quad (\text{П6.6})$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Для функции Бесселя целого порядка  $n$  иногда полезно использовать интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \sin \varphi)} d\varphi = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - x \cos \varphi)} d\varphi. \quad (\text{П6.7})$$

В силу периодичности функций  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  и  $e^{in\varphi}$  интегрирование в (П6.7) можно производить по любому промежутку от  $\varphi_0$  до  $\varphi_0 + 2\pi$ , где  $\varphi_0$  — произвольное вещественное число, а  $n = 0, 1, 2, \dots$

В качестве решений уравнения Бесселя употребляют также цилиндрические функции третьего рода (функции Ганкеля)

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad (\text{П6.8})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \quad (\text{П6.9})$$

Здесь  $H_\nu^{(1)}(x)$  и  $H_\nu^{(2)}(x)$  — функции Ганкеля первого и второго рода ранга  $\nu$ . Последние часто записывают в виде интегралов

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t + ix \operatorname{ch} t} dt, \quad (\text{П6.10})$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - ix \operatorname{ch} t} dt, \quad (\text{П6.11})$$

в которых параметр  $\nu$  и переменная величина  $x$  могут принимать комплексные значения, если рассматривать аналитические продолжения данных функций в комплексную плоскость [8, 9].

Цилиндрические функции первого, второго и третьего родов линейно-независимы, так что общее решение уравнения Бесселя можно представить в виде линейной комбинации с произвольными коэффициентами любых двух из названных цилиндрических функций.

Отметим некоторые свойства цилиндрических функций:

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_{\nu}(x), \quad (\text{П6.12})$$

$$Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x) = 2 \frac{dZ_{\nu}(x)}{dx}, \quad (\text{П6.13})$$

$$\frac{dZ_0(x)}{dx} = -Z_1(x), \quad (\text{П6.14})$$

$$\int_0^x \xi Z_0(\xi) d\xi = x Z_1(x), \quad (\text{П6.15})$$

где в качестве цилиндрической функции  $Z_{\nu}(x)$  может быть взята любая из функций  $J_{\nu}(x)$ ,  $N_{\nu}(x)$ ,  $H_{\nu}^{(1)}(x)$  и  $H_{\nu}^{(2)}(x)$ .

Приближенные выражения цилиндрических функций при малых значениях аргумента  $|x| \ll 1$ :

$$J_{\nu}(x) = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1)}, \quad (\text{П6.16})$$

$$N_n(x) = -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n \quad \text{при } n \geq 1, \quad (\text{П6.17})$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + C\right), \quad (\text{П6.18})$$

где  $C = 0,5772$ . Приближенный вид функций Ганкеля получается из формул (П6.8) и (П6.9) при помощи соотношений (П6.16) — (П6.18).

Асимптотические выражения для больших значений аргумента  $|x| \gg 1$ :

$$J_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{П6.19})$$

$$N_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right), \quad (\text{П6.20})$$

а соответствующие выражения для функций Ганкеля могут быть получены из соотношений (П6.8) и (П6.9) с учетом формул (П6.19) и (П6.20).

При решении многих физических задач приходят к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dy}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) y = 0, \quad (\text{П6.21})$$

решение которого обычно выражают через функции Бесселя  $J_\nu(\lambda r)$  и Неймана  $N_\nu(\lambda r)$  аргумента  $x = \lambda r$ :

$$y = c_1 J_\nu(\lambda r) + c_2 N_\nu(\lambda r), \quad (\text{П6.22})$$

где произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются из граничных условий к уравнению (П6.21), а параметр  $\nu$  может принимать и целочисленные значения.

Функцию  $f(r)$ , непрерывную в промежутке  $(0, \infty)$ , можно разложить в интеграл Фурье — Бесселя

$$f(r) = \int_0^\infty c_\lambda J_n(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (\text{П6.23})$$

где  $n$  — любое целое число или нуль, а коэффициент  $c_\lambda$  разложения представляется интегралом

$$c_\lambda = \int_0^\infty f(r) J_n(\lambda r) r dr. \quad (\text{П6.24})$$

Функции Бесселя  $J_n(\lambda r)$  и  $J_n(\lambda' r)$  с разными значениями параметра  $\lambda$  ортогональны с весом  $r$ :

$$\int_0^\infty J_n(\lambda r) J_n(\lambda' r) r dr = \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda - \lambda'). \quad (\text{П6.25})$$

Для выполнимости разложения Фурье — Бесселя функция  $f(r)$  должна быть кусочно-непрерывной с конечным числом максимумов и минимумов во всяком конечном промежутке изменения аргумента  $r$  и, кроме того, должен абсолютно сходиться интеграл

$$\int_0^\infty f(r) \sqrt{r} dr. \quad (\text{П6.26})$$

## Приложение 7

### ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В ПСЕВДОВЕКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Происшедшее событие принято характеризовать координатами  $x, y, z$  и временем  $t$ . Интервалом между двумя событиями  $x_1, y_1, z_1, t_1$  и  $x_2, y_2, z_2, t_2$  называется величина  $S_{21}$ , квадрат которой дается выражением

$$S_{21}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (\text{П7.1})$$



Согласно основным постулатам теории относительно-сти интервал между двумя одними и теми же события-ми имеет один и тот же вид и численное значение во всех инерциальных системах отсчета. Другими словами, квадратичная форма (П7.1) является инвариантом, т.е. не зависит от выбора инерциальной системы отсчета.

В связи с этим удобно объединить обычное трехмер-ное пространство и время в одно четырехмерное про-странство, каждая точка которого характеризуется 4-радиус-вектором  $x^i$  с компонентами

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (\text{П7.2})$$

Квадрат расстояния между двумя точками в этом четырехмерном пространстве определяется квадратичной формой (П7.1), а квадрат 4-радиус-вектора есть

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = g_{ik} x^i x^k, \quad (\text{П7.3})$$

где  $g_{ik}$  — метрический тензор

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П7.4})$$

Первый индекс  $i = 0, 1, 2, 3$  нумерует строки в таблице (П7.4), а второй индекс  $k$  — столбцы. По повторяю-щимся «немым» индексам, один из которых расположен вверх, а другой вниз, всюду предполагается суммиро-вание от 0 до 3. Пространство с метрикой (П7.3) назы-вается псевдоевклидовым.

Компоненты 4-радиус-вектора (П7.2) при переходе к другой четырехмерной системе координат преобразуются по формуле

$$x^i = a^i_k x'^k, \quad (\text{П7.5})$$

где совокупность коэффициентов  $a^i_k$  составляет матрицу линейного преобразования, описывающего переход от штрихованной системы координат к нештрихованной. Верхний индекс коэффициента  $a^i_k$  обозначает номер строки, а нижний — столбца этой матрицы.

Обратный переход в исходную систему координат дается формулой

$$x'^i = \bar{a}^i_k x^k, \quad (\text{П7.6})$$

где совокупность коэффициентов  $\bar{a}_k^i$  составляет матрицу обратного преобразования такую, что

$$\bar{a}_l^i a_k^l = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (\text{П7.7})$$

Поскольку переход к другой системе координат в рассматриваемом четырехмерном пространстве не меняет квадратичную форму (П7.3), матрицы преобразований (П7.5) и (П7.6) удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik} a_l^i a_m^k = g_{lm}, \quad g_{ik} \bar{a}_l^i \bar{a}_m^k = g_{lm}. \quad (\text{П7.8})$$

Переходу из одной инерциальной системы отсчета в другую (рис. 8) соответствует в четырехмерном пространстве переход от одной координатной системы к другой, повернутой относительно первой на некоторый угол в плоскости  $X^0 X^1$ . Преобразование компонент 4-радиус-вектора, отвечающее такому вращению, называется преобразованием Лоренца. Оно описывается формулой (П7.5), в которой матрица преобразования имеет вид

$$a_k^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{П7.9})$$

Матрица обратного преобразования Лоренца получается из (П7.9) путем изменения знака перед скоростью  $V$  на противоположный.

Четырехмерным вектором  $A^i$  (4-вектором) называется совокупность четырех величин  $A^0$ ,  $A^1$ ,  $A^2$  и  $A^3$ , которые при переходе от одной четырехмерной системы координат к другой преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора

$$A^i = a_k^i A'^k, \quad A'^i = \bar{a}_k^i A^k. \quad (\text{П7.10})$$

По аналогии с 4-радиус-вектором (П7.2) первая компонента  $A^0$  4-вектора  $A^i$  называется временной, а три другие:  $A^1$ ,  $A^2$  и  $A^3$  — пространственными. Эти компоненты иногда выписывают в явном виде, вводя следующее

обозначение для 4-вектора:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}). \quad (\text{П7.11})$$

Как и в случае 4-радиус-вектора, квадратичная форма

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2, \quad (\text{П7.12})$$

составленная из компонент всякого 4-вектора  $A^i$ , является инвариантом. Ее называют квадратом 4-вектора. Квадрат 4-вектора может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Такие 4-векторы называют соответственно времениподобными, пространственноподобными и нулевыми.

В псевдоевклидовом пространстве ради удобства вводят две разновидности компонент 4-вектора. Индексом вверх  $A^i$  помечают контравариантные компоненты 4-вектора, а индексом вниз  $A_i$  обозначают ковариантные компоненты того же самого 4-вектора, которые суть

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (\text{П7.13})$$

Ко- и контравариантные компоненты 4-вектора связаны между собой при помощи ковариантного  $g_{ik}$  и контравариантного  $g^{ik}$  метрических тензоров следующим образом:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (\text{П7.14})$$

Таким образом, один и тот же вектор может быть представлен своими контравариантными или ковариантными компонентами

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}), \quad A_i = (A^0, -\mathbf{A}). \quad (\text{П7.15})$$

После этого квадрат 4-вектора (П7.12) запишется как

$$A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = A_i A^i. \quad (\text{П7.16})$$

По аналогии с выражением (П7.16) определяют скалярное произведение двух 4-векторов  $A_i$  и  $B^i$  в виде

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3. \quad (\text{П7.17})$$

Одно и то же скалярное произведение можно записать в разных формах:

$$\begin{aligned} A_i B^i &= A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k = \\ &= A_0 B^0 - \mathbf{A} \mathbf{B} = A^0 B_0 - \mathbf{A} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{П7.18})$$

Скалярное произведение 4-векторов инвариантно по

отношению к любым поворотам четырехмерной координатной системы и, следовательно, по отношению к преобразованию Лоренца. Другими словами, скалярное произведение 4-векторов является четырехмерным скаляром (4-скаляром).

Поскольку квадрат 4-радиус-вектора  $x_h x^h$  является 4-скаляром, ковариантные компоненты  $x_h$  4-радиус-вектора при переходе к другой четырехмерной системе координат преобразуются по закону

$$x_k = x'_i \bar{a}_k^i, \quad x'_k = x_i a_k^i, \quad (\text{П7.19})$$

где коэффициенты  $a_k^i$  и  $\bar{a}_k^i$  составляют те же самые матрицы, что и в случае преобразования контравариантных компонент (П7.5) и (П7.6). Ковариантные компоненты всякого вектора преобразуются согласно формулам (П7.19).

Дифференциал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{П7.20})$$

четырёхмерного скаляра  $\Phi$  также является 4-скаляром. Здесь он представлен в виде скалярного произведения, составленного из операторов дифференцирования  $\partial/\partial x^i$  и контравариантных компонент  $dx^i$  4-вектора. Отсюда следует, что операторы  $\partial/\partial x^i$  дифференцирования по координатам  $x^i$  должны рассматриваться как ковариантные компоненты операторного 4-вектора. Аналогично операторы  $\partial/\partial x_i$  дифференцирования по ковариантным компонентам  $x_i$  4-радиус-вектора являются контравариантными компонентами операторного 4-вектора, так что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (\text{П7.21})$$

Четырёхмерный градиент 4-скаляра  $\Phi$  представляет собой 4-вектор

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \nabla \Phi \right). \quad (\text{П7.22})$$

Четырёхмерная дивергенция 4-вектора  $A^i$  определяется выражением

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A}. \quad (\text{П7.23})$$

Четырехмерным тензором (4-тензором) второго ранга называется совокупность шестнадцати величин  $T^{ik}$ , которые при переходе от одной четырехмерной системы координат к другой преобразуются как произведения компонент 4-радиус-вектора

$$T^{ik} = a_i^j a_m^k T'^{lm}, \quad T'^{ik} = \bar{a}_i^j \bar{a}_m^k T^{lm}. \quad (\text{П7.24})$$

Четырехмерный тензор более высокого ранга определяется аналогично. Введенные выше 4-вектор и 4-скаляр можно рассматривать как 4-тензоры соответственно первого и нулевого рангов.

Один и тот же 4-тензор может быть представлен своими контравариантными компонентами  $T^{ik}$ , у которых индексы ставятся вверх, а также ковариантными компонентами с индексами вниз  $T_{ik}$  или смешанными компонентами  $T_i^k$ . В последнем случае первый индекс может стоять внизу, а второй вверх, что обозначает другие смешанные компоненты  $T_i^k$  данного 4-тензора.

Подобно формулам (П7.14) связь между разными видами компонент 4-тензора можно установить при помощи ко- и контравариантного метрических тензоров, например,

$$T_{ik} = g_{il} g_{km} T^{lm}, \quad T_{ik} = g_{kl} T_i^l, \quad T_i^k = g_{il} g^{km} T_m^l. \quad (\text{П7.25})$$

Другими словами, поднятие или опускание временного индекса 0 не меняет компоненту 4-тензора, в то время как та же операция над одним из пространственных индексов 1, 2 или 3 меняет знак компоненты.

Если  $T^{ik} = T^{ki}$ , то тензор  $T^{ik}$  называется симметричным, а в случае  $T^{ik} = -T^{ki}$  — антисимметричным. Смешанные компоненты симметричного тензора совпадают:  $T_{ik} = T_{ki}$ , поэтому их записывают как  $T_{ik}$ , располагая индексы один над другим.

В тензорном исчислении основными алгебраическими операциями являются сложение, умножение и свертывание.

Суммой тензоров  $A_{ikm}$  и  $B_{ikm}$  называется тензор  $C_{ikm}$  с компонентами  $C_{ikm} = A_{ikm} + B_{ikm}$ . Другими словами, при сложении тензоров одинакового вида и одного ранга суммируются их одноименные компоненты, причем с обеих сторон всякого тензорного равенства

должны находиться тензоры с одинаковыми и одинаково расположенными свободными индексами.

Произведением тензоров называется тензор, компоненты которого равны произведениям компонент сомножителей. В результате умножения образуется новый тензор, ранг которого равен сумме рангов перемножаемых тензоров. Например, умножая тензор  $A^{ik}$  на  $B_{lm}$ , получаем новый тензор  $C^{ik}_{lm}$  с компонентами  $C^{ik}_{lm} = A^{ik}B_{lm}$ .

Свертыванием (упрощением) тензора называется суммирование по паре индексов, один из которых является ковариантным, а другой — контравариантным. После свертывания образуется другой тензор на две единицы меньшего ранга.

Получающаяся при свертывании сумма

$$T_i^i = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 \quad (\text{П7.26})$$

называется следом или шпуром тензора  $T^{ik}$ . Очевидно  $T_i^i = T_i^i$ .

Если последовательно проводится умножение и свертывание, то такую операцию называют скалярным умножением. Например, в результате скалярного умножения вектора  $A_i$  на тензор  $T^{ik}$  образуется новый вектор  $B^k$ :

$$A_i T^{ik} = B^k. \quad (\text{П7.27})$$

Единичный 4-тензор  $\delta_k^i$  дается выражением

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (\text{П7.28})$$

Его след равен четырем  $\delta_i^i = 4$ . Единичный 4-тензор  $\delta^i$ , как и метрические тензоры  $g_{ik}$  и  $g^{ik}$ , имеет один и тот же вид во всех четырехмерных системах координат.

Если тензоры  $A^{ik}$  и  $B_{ik}$  удовлетворяют равенству

$$A^{il} B_{lk} = \delta_k^i, \quad (\text{П7.29})$$

то они называются обратными друг другу. Например, ковариантный метрический тензор  $g_{ik}$  является обратным контравариантному метрическому тензору  $g^{ik}$ .

Кроме тензоров  $\delta_k^i$ ,  $g_{ik}$  и  $g^{ik}$ , имеется еще один 4-тензор, который не меняется при переходе в другую систему координат. Это совершенно антисимметричный единичный 4-псевдотензор четвертого ранга  $e^{iklm}$ . Его компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов. Поэтому отличны от нуля лишь те компоненты, у которых индексы  $i, k, l$  и  $m$  различны. При этом  $e^{0123} = 1$ , а остальные отличные от нуля компоненты равны 1 или  $-1$  в зависимости от того, четно или нечетно число перестановок, которые приводят данную последовательность чисел  $iklm$  к последовательности 0123. Для тензора  $e_{iklm}$  имеем  $e_{0123} = -1$ , причем

$$e^{iklm}e_{iklm} = -4! = -24. \quad (\text{П7.30})$$

Компоненты истинного 4-тензора четвертого ранга, у которых один индекс временной, а три другие пространственные (или наоборот), меняют знак при инверсии. Между тем компоненты  $e^{iklm}$  не изменяются при инверсии, так как по определению имеют один и тот же вид во всех системах координат. Поэтому  $e^{iklm}$  является не истинным 4-тензором, а 4-псевдотензором.

Обобщение теоремы Гаусса — Остроградского на четырехмерное псевдоевклидово пространство запишется как

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega, \quad (\text{П7.31})$$

где  $A^i$  — некоторый 4-вектор,  $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$  — элемент объема в 4-пространстве, а  $dS_i$  — 4-вектор элемента гиперповерхности, контравариантные компоненты которого суть  $dS^0 = dx^1 dx^2 dx^3$ ,  $dS^1 = dx^0 dx^2 dx^3$ ,  $dS^2 = dx^0 dx^1 dx^3$  и  $dS^3 = dx^0 dx^1 dx^2$ . В левой части равенства (П7.31) интегрирование ведется по замкнутой гиперповерхности, а в правой — по 4-объему, заключенному внутри этой гиперповерхности.

Каждая векторная физическая величина может быть представлена как своими контравариантными, так и ковариантными компонентами в зависимости от удобства. То же относится и к тензорным величинам. В принятых обозначениях 4-импульс  $p^i$ , 4-вектор плотности тока  $j^i$  и 4-потенциал  $A^i$  запишутся как

$$p^i = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad j^i = (c\rho, \mathbf{j}), \quad A^i = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (\text{П7.32})$$

Физический смысл используемых здесь величин раскрыт в теоретическом введении к главе V.

Тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (\text{П7.33})$$

имеет вид

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{П7.34})$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П7.35})$$

Ковариантная форма уравнений Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad (\text{П7.36})$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} = 0. \quad (\text{П7.37})$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{il} F^k_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right). \quad (\text{П7.38})$$

Этот тензор симметричен, а его след равен нулю. Физический смысл различных компонент тензора энергии-импульса виден из следующей таблицы:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} w & s_x/c & s_y/c & s_z/c \\ s_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ s_y/c & -T_{yx} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ s_z/c & -T_{zx} & -T_{zy} & -T_{zz} \end{pmatrix}, \quad (\text{П7.39})$$

где  $w$  — плотность энергии электромагнитного поля,  $s$  — вектор Пойнтинга, а  $T_{\alpha\beta}$  — максвелловский тензор натяжения (V. 38).

Уравнение движения частицы массы  $m$  и заряда  $e$  во внешнем электромагнитном поле:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \quad (\text{П7.40})$$



где  $ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , а  $u^i = (u^0, \mathbf{u})$  — четырехмерная скорость, компоненты которой выражаются через скорость  $\mathbf{v}$  частицы следующим образом:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (\text{П7.41})$$

При движении заряженной частицы со скоростью порядка скорости света к правой части уравнения движения (П7.40) следует дополнительно прибавить четырехмерную силу

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l} u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2 c^5} F^{il} F_{kl} u^k + \\ + \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) u^i, \quad (\text{П7.42})$$

которая учитывает торможение излучением. Временная и пространственные компоненты 4-силы  $g^i$  связаны с трехмерной силой  $\mathbf{f}$  радиационного трения согласно общей формуле

$$g^i = \left( \frac{\mathbf{v} \mathbf{f}}{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (\text{П7.43})$$

Когда скорость заряженной частицы приближается к скорости света, трехмерная сила радиационного трения принимает вид

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2 c^5} (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) \mathbf{v}. \quad (\text{П7.44})$$

Если ось  $X$  направить вдоль скорости  $\mathbf{v}$  частицы, то из (П7.44) получаем выражение (V.65).

---

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1973.
2. Джексон Дж., Классическая электродинамика, «Мир», 1965.
3. Пановский В., Филипс М., Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
5. Тамм И. Е., Основы теории электричества, «Наука», 1976.
6. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н., Сборник задач по электродинамике, «Наука», 1970.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1972.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1973.
9. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1963.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, «Наука», 1974.

---

*Алексей Иванович АЛЕКСЕЕВ*

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

*Учебное пособие*

Издание второе,  
стереотипное

Генеральный директор *А. Л. Кноп*  
Директор издательства *О. В. Смирнова*

ЛР № 065466 от 21.10.97

Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.004173.04.07  
от 26.04.2007 г., выдан ЦГСЭН в СПб

**Издательство «ЛАНЬ»**

lan@lpbl.spb.ru

www.lanbook.com

192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812)567-29-35, 567-05-97, 567-92-72

Сдано в набор 06.02.08. Подписано в печать 25.05.08.  
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 84×108 <sup>1</sup>/<sub>32</sub>.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 16,80. Тираж 2000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии  
с качеством предоставленных диапозитивов  
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».  
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.  
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru