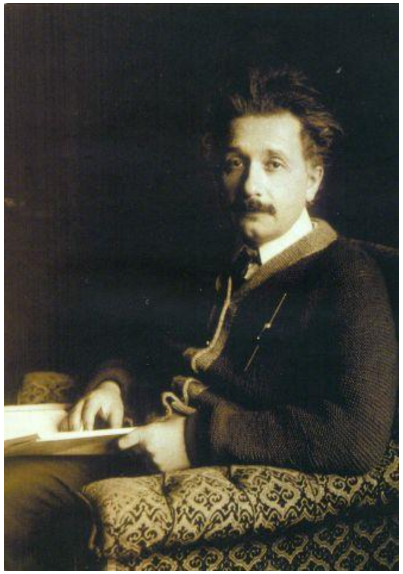
$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$



Общая теория относительности

Курс лекций

Автор: доцент кафедры
теоретической и вычислительной физики
Т. П. Шестакова

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Москва, "Наука", 1988.
2. К. Зелиг, *Альберт Эйнштейн*, Москва, "Атомиздат", 1964.
3. Б. Хофман, *Альберт Эйнштейн: творец и бунтарь*, Москва, "Прогресс", 1983.
4. У. Кауфман, *Космические рубежи теории относительности*, Москва, "Мир", 1981.
5. Г. т'Хоофт, *Введение в общую теорию относительности*, Москва – Ижевск, "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
6. Ю. С. Владимиров, *Классическая теория гравитации*, Москва, "ЛИБРОКОМ", 2009.
7. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер, *Гравитация*, т. 1 – 3, Москва, "Мир", 1977.
8. Р. М. Уолд, *Общая теория относительности*, Москва, Российский Университет дружбы народов, 2008.
9. С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Москва, "Мир", 1975.
10. А. С. Эддингтон, *Теория относительности*, Москва – Ленинград, 1934.

Литература

11. В. Паули, *Теория относительности*, Москва, "Наука", 1991.

12. Р. Толмен, *Относительность, термодинамика и космология*, Москва, "Наука", 1974.

13. В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва, 1955.

14. П. Г. Бергман, *Введение в теорию относительности*, Москва, "Иностранная литература", 1947.

15. У. Берке, *Пространство-время, геометрия, космология*, Москва, "Мир", 1985.

16. Г. К. Мак-Витти, *Общая теория относительности и космология*, Москва, "Иностранная литература", 1961.

17. К. Меллер, *Теория относительности*, Москва, "Атомиздат", 1975.

18. И. Б. Хриплович, *Общая теория относительности*, Ижевск, "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

19. A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Ann. Phys.*, **49** (1916), S. 769; русский перевод: А. Эйнштейн, "Основы общей теории относительности", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 452–504.

Альберт Эйнштейн

1905 г. – работы Эйнштейна по броуновскому движению, фотоэффекту, специальной теории относительности.

1907 г. – Минковский вводит представление о едином четырехмерном пространственно-временном континууме.

1907 г. – принцип эквивалентности:

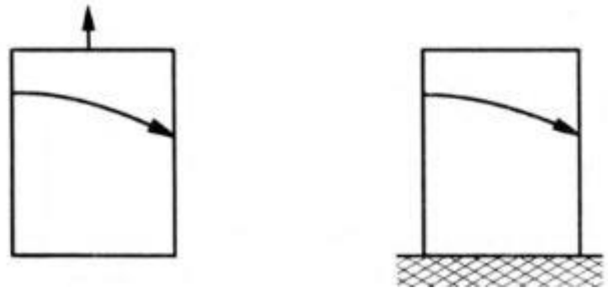
“И тогда мне в голову пришла счастливейшая мысль в моей жизни. Существование гравитационного поля может считаться лишь относительным… Это связано с тем, что для наблюдателя, свободно падающего с крыши, гравитационное поле, по крайней мере, в его ближайшем окружении, не существует…”

Явления, происходящие локально (в небольшой области пространства) никакими физическими экспериментами невозможно отличить от явлений, имеющих место в ускоренно движущейся системе отсчета с соответственно подобранным ускорением.

Альберт Эйнштейн

“[В физике] *я скоро научился выискивать то, что может повести в глубину, и отбрасывать все остальное, т. е. то, что перегружает ум и отвлекает от существенного.”*

Мысленные эксперименты



1912 – 1913 годы – работа в Цюрихе с Марселем Гроссманом.

A. Einstein, M. Grossmann, "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation", *Zs. Math. und Phys.*, **62** (1913), S. 225; русский перевод: А. Эйнштейн, М. Гроссман, "Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 227–266.

Альберт Эйнштейн

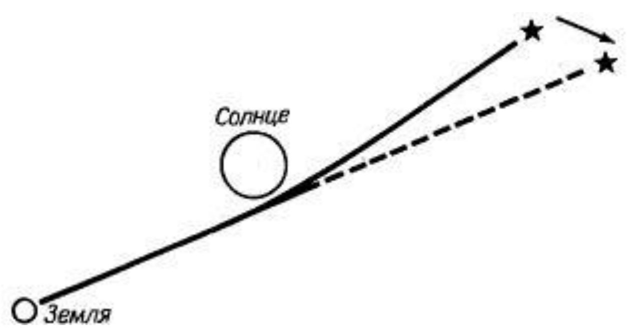
1914 г. – Эйнштейн переезжает в Берлин.

25 ноября 1915 года в Берлине Эйнштейн представил физико-математическому отделению Прусской Академии наук работу, в которой он завершил построение своей теории и записал в окончательной форме уравнения гравитационного поля, которые ныне носят его имя.

A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation", *Sitzungsberichte Preußische Akad. der Wissenschaften* **48** (1915), S. 844; русский перевод: А. Эйнштейн, "Уравнения гравитационного поля", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 448–451.

Подтверждение общей теории относительности

1919 г. – экспедиция А. Эддингтона; наблюдение гравитационного отклонения лучей света во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года.



Подтверждение общей теории относительности

1974 г. – исследования двойного пульсара PSR 1913+16 (пульсар является частью системы из двух нейтронных звезд), проведенные Джозефом Тейлором и Расселом Халсом (Нобелевская премия за 1993 год); косвенное подтверждение существования гравитационных волн.

Гравитационные волны

A. Einstein, "Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation", *Sitzungsberichte Preußische Akad. der Wissenschaften* (1916), S. 644; русский перевод: А. Эйнштейн, "Приближенное интегрирование уравнений гравитационного поля", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 514–523.

B. P. Abbott et al., "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger", *Phys. Rev. Lett*. **116** (2016), 061102.

Точные решения общей теории относительности

1916 г. – Карл Шварцшильд получает точное решение для гравитационного поля точечной массы.

K. Schwarzschild, "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", *Sitzungsberichte Preußische Akad. der Wissenschaften* (1916), S. 189; русский перевод: К. Шварцшильд, "О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории", в сборнике.: *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Москва, "Мир", 1979, С. 199–207.

Космологические решения

1917 г. – первая статья Эйнштейна по космологии.

A. Einstein, "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie", *Sitzungsberichte Preußische Akad. der Wissenschaften*, **1**, (1917), S. 142; русский перевод: А. Эйнштейн, "Вопросы космологии и общая теория относительности", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 601–611.

1916–1917 годы – серия работ В. Де Ситтера, в которых была предложена *космологическая модель де Ситтера*.

Космологические решения

1922–1924 годы – *изотропные космологические модели* А. Фридмана.

A. Friedmann, "Über die Krümmung des Raumes", *Z. Phys.*, **10** (1922), S. 377; русский перевод: А. Фридман, "О кривизне пространства", *Избранные труды*, Москва, "Наука", 1966, С. 229–238.

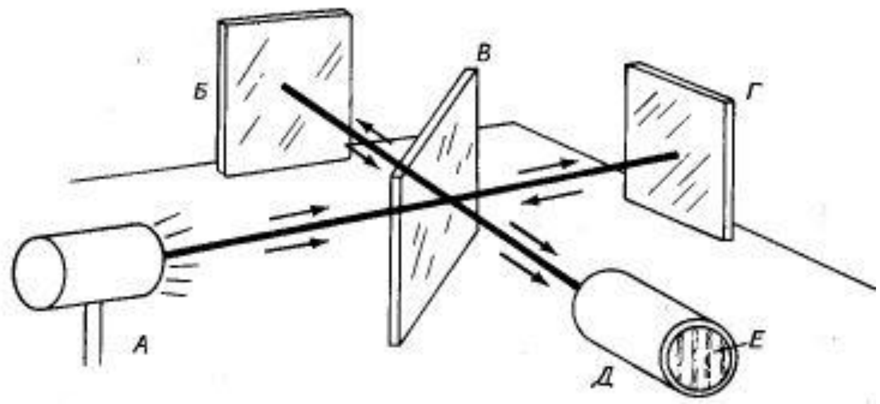
A. Friedmann, "Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes", *Z. Phys.*, **21** (1924), S. 326; русский перевод: А. Фридман, "О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной пространства", *Избранные труды*, Москва, "Наука", 1966, С. 238–244.

Специальная теория относительности

A. Einstein, "Zur Elektrodynamik der bewegter Körper", *Ann. Phys.*, **17** (1905), S. 891; русский перевод: А. Эйнштейн, "К электродинамике движущихся тел", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 7–35.

- Принцип постоянства скорости света;
- Принцип относительности.

Опыт Майкельсона – Морли (1887 год)



Специальная теория относительности

Принцип постоянства скорости света: понятие одновременности двух событий не имеет абсолютного смысла; оно зависит от системы отсчета, в которой наблюдаются события.

Преобразования Лоренца:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'$$

Сокращение длины:

Длина стержня в системе отсчета *A*: $\Delta x = x_2 - x_1$

Длина стержня в системе отсчета *B*: $\Delta x' = x_2' - x_1'$

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Длина стержня l_0 в системе отсчета, относительно которой он покоится, называется его *собственной длиной*. Длина стержня в системе отсчета, относительно которой он движется, испытывает сокращение.

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \qquad l < l_0$$

Специальная теория относительности

Замедление времени:

Интервал времени в системе отсчета A: $\Delta t = t_2 - t_1$

Интервал времени в системе отсчета B: $\Delta t' = t_2' - t_1'$

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Собственным временем τ называется время, отсчитываемое по часам, покоящимся относительно данной системы отсчета. В движущейся системе отсчета время течет медленнее.

$$t = \tau\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \qquad t < \tau$$

Специальная теория относительности

Поскольку никакой физический объект не может двигаться с бесконечной скоростью, пройденное объектом пространственное расстояние и интервал времени оказываются взаимосвязанными.

Инвариантность пространственно-временного интервала:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = c\ dt \qquad \Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = 0$$

Если пространственно-временной интервал равен нулю в одной системе отсчета, он будет равен нулю и во всех остальных.

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad ds^2 = a\ ds'^2$$

$$ds_1^2 = a\left(V_{12}\right)ds_2^2; \quad ds_1^2 = a\left(V_{13}\right)ds_3^2; \quad ds_2^2 = a\left(V_{23}\right)ds_3^2$$

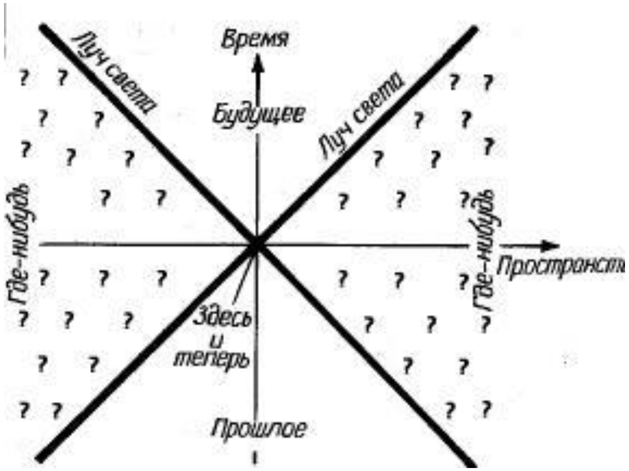
$$a\left(V_{12}\right)a\left(V_{23}\right) = a\left(V_{13}\right)$$

$$ds^2 = ds'^2$$

Пространство-время Минковского

H. Minkowski, "Raum und Zeit", *Z. Phys.*, **10** (1909), S. 104; русский перевод: Г. Минковский, "Пространство и время", в сборнике: *Принцип относительности*, Москва, "Атомиздат", 1973, С. 167–182.

Минковский сопоставляет каждому событию, имеющему место в пространстве в определенный момент времени, *мировую точку* с координатами t, x, y, z. Если мы представим, что в этой точке находится частица, с течением времени она будет перемещаться вдоль *мировой линии*.

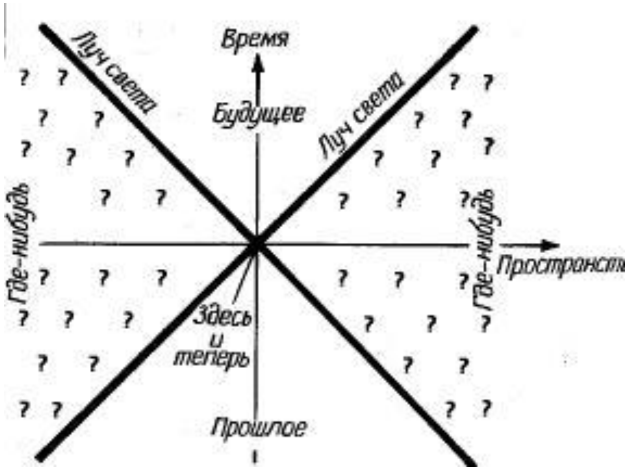


$$s^2 = c^2t^2 - x^2$$

Лучи света: $x = \pm ct$

Световой конус: $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$

Пространство-время Минковского



Рассмотрим частицу, которая покоится относительно некоторой системы отсчета.

$$s^2 = c^2t^2 > 0$$

Из инвариантности интервала следует, что в любой другой системе отсчета квадрат интервала также будет положительным, а сам интервал вещественным. В этом случае интервал называется ***временноподобным***.

Все мировые точки, которые удовлетворяют условию

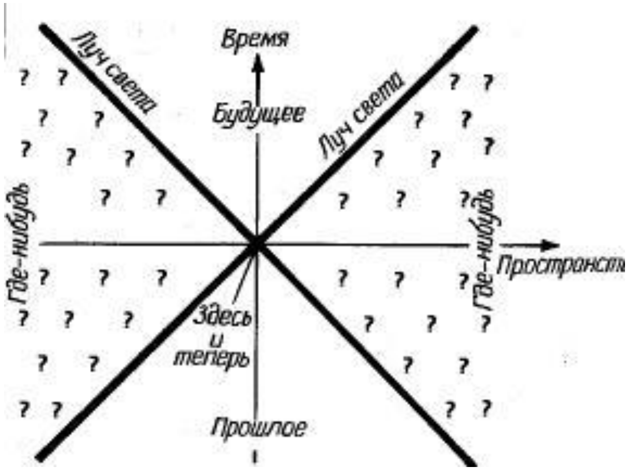
$$s^2 > 0 \quad \text{или} \quad c^2t^2 > x^2 + y^2 + z^2$$

попадают внутрь светового конуса. Внутрь светового конуса попадают мировые линии частиц, которые движутся со скоростью, ***меньшей скорости света***, в частности, покоятся.

Точки, находящиеся внутри или на поверхности светового конуса, являются ***причинно связанными***, так как они могут быть связаны сигналами, скорость которых не превышает скорость света.

Все события, лежащие внутри и на поверхности верхней части светового конуса, находятся в будущем по отношению к началу координат.

Пространство-время Минковского



Рассмотрим теперь два события, которые являются одновременными с точки зрения некоторой системы отсчета, хотя разделены некоторым пространственным интервалом.

$$s^2 = -x^2 - y^2 - z^2 < 0$$

В любой другой системе отсчета квадрат интервала также будет отрицательным, а сам интервал мнимым. В этом случае интервал называется ***пространственноподобным***.

Мировые точки, которые удовлетворяют условию

$$s^2 < 0$$

находятся вне светового конуса и являются ***причинно не связанными***, поскольку для того, чтобы сигнал, посланный из одной точки данной области, достиг другой точки, необходимо, чтобы сигнал распространялся со скоростью, превышающей скорость света, что невозможно.

Все события, лежащие внутри и на поверхности нижней части светового конуса, находятся в прошлом по отношению к началу координат.

Четырехмерный формализм

В специальной теории относительности особая роль отводится ***причинно-следственным связям*** между событиями: для каждой точки пространства времени известно, какие события в прошлом могли оказать влияние на событие в этой точке, и на какие события в будущем могут повлиять сигналы, исходящие из этой точки.

Такая причинно-следственная структура сохраняется и в общей теории относительности. Анализ причинно-следственных связей позволяет установить структуру пространства-времени в общей теории относительности.

Четырехмерный радиус-вектор:

$$x^{\mu}: \quad \mu = (0,\ 1,\ 2,\ 3), \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Контравариантные (с индексами сверху) и ***ковариантные*** (с индексами снизу) компоненты 4-вектора:

$$x_{\mu}: \quad x_0 = x^0 = ct, \quad x_1 = -x^1 = -x, \quad x_2 = -x^2 = -y, \quad x_3 = -x^3 = -z$$

$$x_{\mu} x^{\mu} \overset{def}{=} \sum_{\mu=0}^{3} x_{\mu} x^{\mu} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Четырехмерный формализм

Для произвольного 4-вектора:

$$A_\mu,\ A^\mu: \quad A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3$$

Скалярное произведение:

$$A_\mu B^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Метрический тензор:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \qquad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \qquad g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$$

Четырехмерный формализм

Ковариантные и контравариантные векторы и тензоры

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x)$$

Контравариантным 4-вектором называется совокупность четырех величин A^{μ}, которые при преобразовании координат преобразуются как дифференциалы:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \qquad\qquad dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}$$

Ковариантным 4-вектором называется совокупность четырех величин A_{μ}, которые при преобразовании координат преобразуются как производные скалярного поля:

$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu} \qquad\qquad \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}}$$

Тензоры второго ранга:

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\lambda\rho}$$ (контравариантные компоненты)

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} A_{\lambda\rho}$$ (ковариантные компоненты)

$$A'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho}_{\lambda}$$ (смешанные компоненты)

Четырехмерный формализм

Преобразование от декартовых координат к сферическим:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Оба метрических тензора соответствуют плоскому пространству-времени Минковского. Изменение компонент тензоров при преобразованиях координат не соответствует изменению геометрии пространства-времени. Этот вывод остается справедливым и в общей теории относительности.

Общую теорию относительности относят к классу ***калибровочных*** теорий (теорий, инвариантных относительно некоторой группы преобразований). Преобразования компонент тензоров при преобразованиях координат ***не являются физическими***, поскольку геометрия пространства-времени остается неизменной, значение компонент тензоров определяется выбором системы отсчета.

Четырехмерный формализм

При переходе от одной системы координат к другой элемент объема в четырехмерном пространстве должен преобразовываться в соответствии с общими правилами:

$$d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \to J d^4 x' = J dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$$

$$J = \frac{\partial\left(x^0,\, x^1,\, x^2, x^3\right)}{\partial\left(x'^0,\, x'^1,\, x'^2, x'^3\right)} = \left|\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\right|$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} g_{\lambda\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \qquad g = -J^2 \qquad J = \sqrt{-g}$$

$$\sqrt{-g}\, d^4x = dt\; r^2 dr\; \sin\theta d\theta\; d\varphi$$

Релятивистская частица

Действие для релятивистской частицы:

$$S = -mc\int_{t_1}^{t_2} ds$$

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots$$

$$\lim_{c\to\infty} S = -mc^2\int_{t_1}^{t_2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)dt = -mc^2(t_2-t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\frac{mv^2}{2}dt \approx \int_{t_1}^{t_2}\frac{mv^2}{2}dt$$

Функция Лагранжа: $\mathrm{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\qquad p = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}}$ $\qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

При $c \to \infty$ $\quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Релятивистская частица

Четырехмерная скорость частицы (4-скорость):

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^\mu}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{dx_\mu}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\quad -\frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Компоненты 4-скорости представляют собой производные координат по параметру *s*, с помощью которого можно параметризовать мировую линию частицы.

В системе отсчета, в которой частица покоится, $u^\mu = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \quad \Rightarrow \quad u_\mu u^\mu = 1$$

4-скорость представляет собой единичный 4-вектор касательной к мировой линии частицы.

4-ускорение: $w^\mu = \dfrac{du^\mu}{ds} = \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2}$ $\qquad u_\mu w^\mu = 0$

Релятивистская частица

4-импульс свободной частицы: $p^\mu = mcu^\mu$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Функция Гамильтона:

$$\mathrm{H} = \mathbf{pv} - \mathrm{L} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия покоя частицы: $E_0 = mc^2$ $\qquad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \ \mathbf{p} \right)$

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad p_\mu p^\mu = m^2c^2 \qquad \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$$

Принцип эквивалентности

В однородном гравитационном поле все физические явления происходят точно так же, как в равномерно ускоренной системе координат в отсутствии поля тяготения.

$$\Updownarrow$$

Закон равенства инертной и гравитационной масс.

$$m\mathbf{g} = GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Именно в силу равенства инертной и гравитационной масс все тела в поле тяготения массы M падают с одинаковым ускорением, независимо от того, какова их собственная масса. Поэтому в системе отсчета, движущейся с ускорением $\mathbf{a}=\mathbf{g}$ в свободном пространстве, где нет полей тяготения, тела будут двигаться по тем же законам, что и в гравитационном поле массы M.

Если мы ограничимся рассмотрением только ***законов движения***, мы приходим к тому, что иногда называют ***слабым принципом эквивалентности***.

Эйнштейн распространил этот принцип не только на законы движения, но и на ***все физические явления***. В такой формулировке мы получаем так называемый ***сильный принцип эквивалентности***.

Принцип эквивалентности

Принцип эквивалентности имеет место лишь ***локально***, в области пространства, достаточно малой для того, чтобы считать гравитационное поле в ней однородным.

Нельзя построить такую неинерциальную систему отсчета, которая позволила бы исключить гравитационное поле во всем пространстве.

Преобразование координат приводит к изменению компонент метрического тензора; они, вообще говоря, становятся зависимыми от координат.

Преобразования Лоренца сохраняют вид квадрат интервала:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$ds'^2 = \left[c^2 - \omega^2\left(x'^2 + y'^2\right)\right]dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\omega y'dt'dx' - 2\omega x'dt'dy'$$

Из принципа эквивалентности следует, что в гравитационном поле компоненты метрического тензора также должны зависеть от координат:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\left(x\right)dx^\mu dx^\nu$$

Принцип эквивалентности

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu$$

Поскольку принцип эквивалентности имеет место лишь локально, в случае истинного гравитационного поля мы не сможем привести метрический тензор к виду, который он имеет в пространстве-времени Минковского каким-либо преобразованием координат сразу во всем пространстве-времени. Это можно сделать только локально в каждой точке пространства-времени.

Переход к неинерциальной системе отсчета подразумевает переход к ***криволинейной системе координат***. Невозможность вернуться от криволинейной системе координат к декартовой сразу во всем пространстве-времени означает, что ***само пространство-время является искривленным в присутствии тяготеющих масс, т.е. источников гравитационного поля***.

Величины $g_{\mu\nu}(x)$ определяют все свойства геометрии пространства-времени, определяют, как говорят, ***метрику*** пространства-времени.

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$$

Имеется всего 10 независимых компонент метрического тензора, которые описывают гравитационное поле. В общей теории относительности они несут функцию обобщенных координат.

Принцип эквивалентности

Метрический тензор пространства-времени Минковского в декартовой системе координат соответствует ***псевдоевклидову*** пространству.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu$$

Любой метрический тензор даже в искривленном пространстве-времени может быть приведен к такому виду соответствующим преобразованием координат; это эквивалентно приведению к диагональному виду квадратичной формы с постоянными коэффициентами, которыми являются значения компонент тензора в данной точке.

Систему координат, в которой компоненты метрического тензора имеют значения (во всем пространстве-времени либо в данной точке пространства-времени), называют ***галилеевой***. Набор знаков, который имеют диагональные компоненты после приведения тензора к диагональному виду, называется сигнатурой метрики:

$$(+---)$$

Противоположная последовательность знаков: $(-+++)$ $\quad ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

Определитель метрического тензора: $g < 0$

Система отсчета в общей теории относительности

В специальной теории относительности систему отсчета можно представить с помощью конечного числа тел и часов, в общей теории относительности это не так.

Поскольку пространство-время, вообще говоря, является ***искривленным***, является искривленным собственно пространство, его геометрические свойства меняются от точки к точке. Геометрические свойства пространства меняются со временем, поскольку компоненты метрического тензора зависят от временной координаты.

Это говорит о том, что в общей теории относительности нельзя определить систему отсчета с помощью конечного числа тел, неподвижных друг относительно друга. Поскольку используются криволинейные координаты, в каждой точке пространства нужно указать направления их изменения, а также связать с каждой точкой пространства часы, причем в различных точках пространства, даже бесконечно близких, часы не обязательно идут синхронно.

Часто прибегают к представлению о том, что в каждой точке пространства-времени вводится четверка (***тетрада***) единичных векторов, указывающих в направлении возрастания соответствующей координаты. Они не обязательно являются взаимно ортогональными.

Система отсчета в общей теории относительности

“Для точного определения положения частицы в пространстве необходимо, строго говоря, иметь совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство, наподобие некоторой «среды». Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.”

Ландау и Лифшиц, *Теория поля*

A. Einstein, *Ather und Relativitätstheorie*, Berlin, "Springer", 1920; русский перевод: А. Эйнштейн, "Эфир и теория относительности", *Собрание научных трудов*, Т. 1, Москва, "Наука", 1965, С. 682–689.

Эйнштейн говорит о том, что общая теория относительности допускает представление об эфире как среде, определяющей метрические соотношения в пространственно-временном континууме.

“Отрицать эфир – это в конечном счете значит принимать, что пустое пространство не имеет никаких физических свойств… Представление о физически пустом пространстве окончательно устраняется… пространственно-временной изменяемостью масштабов и часов.”

Система отсчета в общей теории относительности

Мы можем представлять четырехмерное пространство-время как совокупность трехмерных гиперповерхностей, каждая из которых отвечает определенному моменту времени. При этом мы вводим в пространстве-времени так называемое ***(3+1)-расщепление***.

Потребуем, чтобы пространственные компоненты метрики определяли метрику трехмерного пространства:

$$g_{ij} = -\gamma_{ij} \qquad dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \qquad \gamma^{jk}\gamma_{ki} = \delta_i^j$$

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{i0} = 1 \\ & g^{00} g_{0i} + g^{0j} g_{ji} = 0 \\ & g^{i0} g_{00} + g^{ij} g_{j0} = 0 \\ & g^{j0} g_{0i} + g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g_{0i} = -\frac{g^{0j} g_{ji}}{g^{00}}$$

$$\Rightarrow \quad -g^{j0} \frac{g^{0k} g_{ki}}{g^{00}} + g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j$$

$$\left(\frac{g^{j0} g^{0k}}{g^{00}} - g^{jk} \right) \gamma_{ki} = \delta_i^j$$

$$\gamma^{ij} = \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} - g^{ij}$$

Система отсчета в общей теории относительности

$$N_i = g_{0i} \qquad N^i = \gamma^{ij} N_j \qquad N_i = \gamma_{ij} N^j \qquad g^{00} = \frac{1}{N^2}$$

Выразим компоненты четырехмерного метрического тензора $g_{\mu\nu}$ через функции N, N_i и выясним геометрический смысл этих функций.

$$N^i = \gamma^{ij} N_j = \left(\frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} - g^{ij} \right) g_{0j} = \frac{g^{0i}}{g^{00}} g^{0j} g_{0j} - g^{ij} g_{0j}$$

$$g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{i0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad g^{0i} g_{i0} = 1 - g^{00} g_{00}$$

$$g^{i0} g_{00} + g^{ij} g_{j0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g^{ij} g_{j0} = -g^{i0} g_{00}$$

$$N^i = \frac{g^{0i}}{g^{00}} \left(1 - g^{00} g_{00}\right) + g^{i0} g_{00} = \frac{g^{0i}}{g^{00}} - g^{0i} g_{00} + g^{i0} g_{00} = \frac{g^{0i}}{g^{00}}$$

$$g^{0i} = g^{00} N^i = \frac{N^i}{N^2} \qquad g_{00} = \frac{1}{g^{00}} \left(1 - g^{0i} g_{i0}\right) = N^2 \left(1 - \frac{N_i N^i}{N^2}\right) = N^2 - N_i N^i$$

$$\gamma^{ij} = \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} - g^{ij} \qquad \Rightarrow \qquad g^{ij} = \frac{g^{0i} g^{0j}}{g^{00}} - \gamma^{ij} = N^2 \frac{N^i}{N^2} \frac{N^j}{N^2} - \gamma^{ij} = \frac{N^i N^j}{N^2} - \gamma^{ij}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 - N_k N^k & N_j \\ N_i & -\gamma_{ij} \end{pmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{N^2} & \dfrac{N^j}{N^2} \\ \dfrac{N^i}{N^2} & \dfrac{N^i N^j}{N^2} - \gamma^{ij} \end{pmatrix} \qquad g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$$

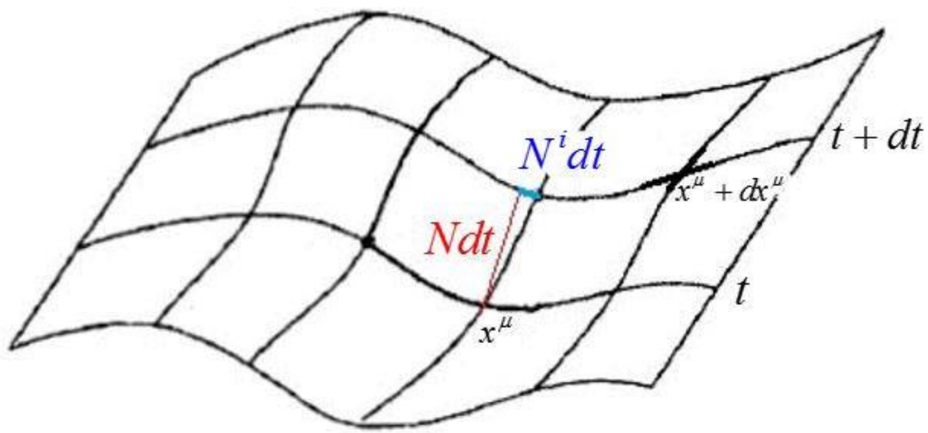
Система отсчета в общей теории относительности

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 - N_k N^k & N_j \\ N_i & -\gamma_{ij} \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \left(N^2 - N_i N^i \right) dt^2 + 2N_i dt\ dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j =$$

$$= N^2 dt^2 - \gamma_{ij} \left(dx^i - N^i dt \right) \left(dx^j - N^j dt \right)$$

Система отсчета в общей теории относительности

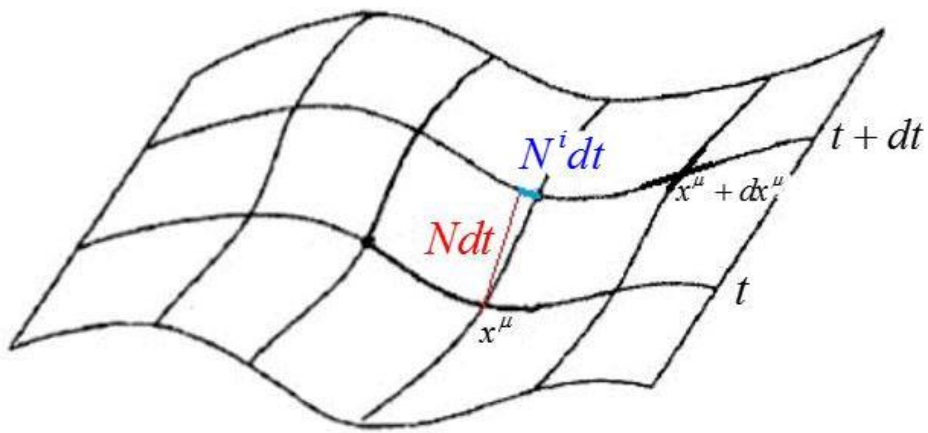


На рисунке показаны две гиперповерхности, соответствующие моментам времени t и $t+dt$. Рассмотрим точку с координатами x^μ на нижней гиперповерхности, и проведем из этой точки перпендикуляр до пересечения с верхней гиперповерхностью. Поскольку наша система координат криволинейна, конец перпендикуляра отстоит от точки $x^\mu+dt$ на отрезок, длина которого тем больше, чем больше интервал времени между гиперповерхностями dt.

Точка $x^\mu+dt$ оказывается сдвинутой относительно конца перпендикуляра, величину сдвига по каждой из пространственных координат можно обозначить как $N^i dt$.

N^i – зависящие от каждой точки коэффициенты, которые называются ***функциями сдвига***.

Система отсчета в общей теории относительности



Расстояние между концом перпендикуляра и точкой $x^\mu + dt$ в верхней гиперповерхности

$$\gamma_{ij}\left(N^i dt\right)\left(N^j dt\right) = N_i N^i dt^2$$

Расстояние между гиперповерхностями определяется длиной перпендикуляра, оно также пропорционально dt. Обозначим это расстояние как $N\,dt$.

N – зависящий от каждой точки коэффициент, называемый ***функцией хода***.

Это расстояние определяет промежуток собственного времени между гиперповерхностями.

Система отсчета в общей теории относительности

Определение одновременных событий

Пусть из точки пространства A с координатами x^i отправляется световой сигнал в бесконечно близкую к ней точку пространства B с координатами x^i+dx^i, а затем возвращается обратно в точку A.

$$ds^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(N^2 - N_i N^i\right) dt_{(0)}^2 + 2N_i dt_{(0)} dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j = 0$$

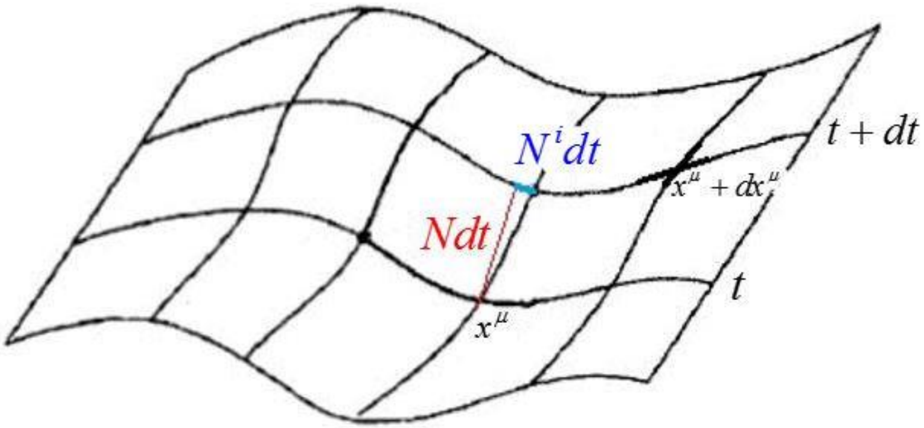
$$dt_{(0)1,2} = \frac{-N_i dx^i \pm \sqrt{\left(N_i dx^i\right)^2 + \left(N^2 - N_k N^k\right)\gamma_{ij} dx^i dx^j}}{\left(N^2 - N_k N^k\right)}$$

Если мы обозначим через $t_{(0)}$ момент приема светового сигнала в точке B, момент отправления сигнала из точки A (более ранний) будет $t_{(0)}+dt_{(0)2}$, а момент возвращения сигнала в точку A (более поздний) будет $t_{(0)}+dt_{(0)1}$. Одновременным с моментом приема сигнала в точке B следует считать показание часов в точке A, которое лежит посередине между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в точку A.

$$t_{(0)} + \frac{1}{2}\left(dt_{(0)1} + dt_{(0)2}\right) = t_{(0)} + \Delta t = t_{(0)} - \frac{N_i dx^i}{\left(N^2 - N_k N^k\right)}$$

Часы в бесконечно близких точках пространства A и B могут быть синхронизированы (приведены в соответствие). Таким образом можно синхронизировать часы вдоль любой незамкнутой линии.

Система отсчета в общей теории относительности



Две точки *A* и *B* будут лежать на одной и той же гиперповерхности равного времени, если только в любой точке пространства-времени

$$N_i = 0$$

Система отсчета, в которой выполняется это условие, называется ***синхронной***. В такой системе отсчета возможна синхронизация часов вдоль замкнутой линии в пространстве. Линии времени в этом случае будут проходить строго под прямым углом к гиперповерхности.

$$g_{0i} = 0$$

Система отсчета в общей теории относительности

Рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке пространства. Собственное время τ определим как параметр вдоль мировой линии, соединяющей эти события:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \qquad dx^i = 0$$

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0$$

Эта формула устанавливает связь между собственным временем и временной координатой x^0 в произвольной системе отсчета.

В синхронной системе отсчета

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{N^2 - N_i N^i} = N \qquad d\tau = \frac{1}{c} N dt$$

Этот результат согласуется со сделанным выше утверждением, что расстояние между двумя гиперповерхностями определяет промежуток собственного времени между ними.

Система отсчета в общей теории относительности

Для того, чтобы полностью фиксировать систему отсчета, недостаточно условий

$$N_i = 0 \qquad \text{или} \qquad g_{0i} = 0$$

Необходимо еще задать функцию N, определяющую скорость течения времени в каждой точке.

Эквивалентно, можно наложить условие на компоненту g_{00} метрического тензора. Именно задание компонент g_{00} и $g_{0\mathrm{i}}$ полностью фиксируют систему отсчета.

В общей теории относительности собственное время течет по-разному в разных точках пространства.

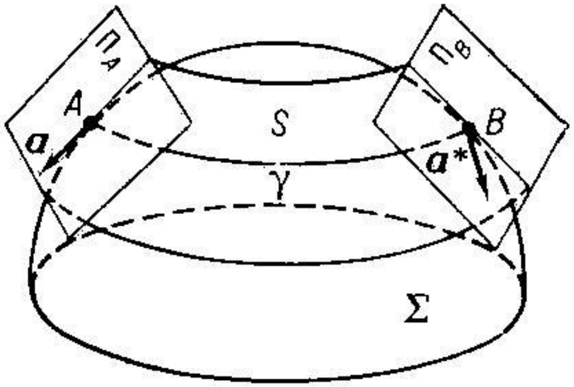
Интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал собственного времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

Расстояния между двумя гиперповерхностями равного времени различны в разных точках пространства.

Параллельный перенос векторов

Дифференциал векторного поля есть разность векторов в двух бесконечно близких точках пространства. Для сравнения двух векторов мы переносим один из них параллельно самому себе в точку, где находится другой вектор.

В искривленном пространстве компоненты вектора в данной точке определяются в касательном пространстве. В касательном пространстве лежат единичные векторы (орты), указывающие направления изменения криволинейных координат. Компоненты вектора в данной точке можно определить как его проекции на направления ортов.



При переходе от одной точке к другой вдоль некоторой кривой, лежащей в искривленном пространстве, касательное пространство изменяется.

При параллельном переносе вектора вдоль кривой угол между ним и касательной к кривой остается неизменным.

Параллельный перенос векторов

При определении разности векторов в двух точках пространства нужно учитывать разницу в компонентах векторов, обусловленную не только тем, что векторы изначально находились в разных точках пространства, но и тем, что компоненты вектора претерпевают изменение при параллельном переносе.

Пусть некоторый контравариантный вектор имеет в точке с координатами x^μ значение A^μ, а в точке с координатами $x^\mu+dx^\mu$ – значение $A^\mu+dA^\mu$.

dA^μ – это разность в значениях компонент векторного поля, обусловленная тем, что мы рассматриваем векторы в различных точках пространства.

Перенесем вектор A^μ из точки x^μ в точку $x^\mu+dx^\mu$; изменение его компонент в результате такого переноса обозначим δA^μ. Теперь оба вектора будут находиться в одной точке, разность этих векторов есть

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu$$

Изменение δA^μ компонент вектора вследствие бесконечно малого переноса должно линейно зависеть от самих компонент вектора и от расстояния, на которое вектор был перенесен:

$$\delta A^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda$$

Величины $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ называются ***коэффициентами связности*** или ***символами Кристоффеля***.

Ковариантные производные

В плоском пространстве в декартовой системе координат символы Кристоффеля равны нулю. Однако в криволинейной системе координат даже в плоском пространстве они не будут равны нулю. Это говорит о том, что символы Кристоффеля не составляют тензора.

$$DA^{\mu} = dA^{\mu} - \delta A^{\mu} \qquad dA^{\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \qquad \delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} A^{\nu} dx^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \qquad DA^{\mu} = \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda} \right) dx^{\nu}$$

Ковариантная или ***удлиненная производная*** контравариантного вектора:

$$D_{\nu} A^{\mu} = A^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} A^{\lambda}$$

Скалярные величины не изменяется при параллельном переносе:

$$\delta\left(A_{\mu} B^{\mu}\right) = \delta A_{\mu} B^{\mu} + A_{\mu} \delta B^{\mu} = 0$$

$$B^{\mu} \delta A_{\mu} = -A_{\mu} \delta B^{\mu} = A_{\mu} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} B^{\nu} dx^{\lambda} = B^{\mu} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu} dx^{\lambda}$$

$$\delta A_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} A_{\nu} dx^{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad DA_{\mu} = \left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda} \right) dx^{\nu}$$

$$D_{\nu} A_{\mu} = A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}$$

Ковариантные производные

$$\delta\left(A^{\mu}B^{\nu}\right)=\delta A^{\mu}B^{\nu}+A^{\mu}\delta B^{\nu}=-\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}A^{\lambda}B^{\nu}dx^{\rho}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}A^{\mu}B^{\lambda}dx^{\rho}$$

$$\delta A^{\mu\nu}=-\left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}A^{\lambda\nu}+\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}A^{\mu\lambda}\right)dx^{\rho}$$

$$D_{\lambda}A^{\mu\nu}=A^{\mu\nu}_{;\lambda}=\frac{\partial A^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}A^{\rho\nu}+\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}A^{\mu\rho}$$

$$D_{\lambda}A_{\mu\nu}=A_{\mu\nu;\lambda}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}-\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}A_{\rho\nu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}A_{\mu\rho}$$

$$D_{\lambda}A^{\nu}_{\mu}=A^{\nu}_{\mu;\lambda}=\frac{\partial A^{\nu}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}}-\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}A^{\nu}_{\rho}+\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}A^{\rho}_{\mu}$$

Правило ковариантного дифференцирования:

Для получения ковариантной производной тензора $A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ ***по*** x^{λ}***, к обычной производной*** $\dfrac{\partial A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}}{\partial x^{\lambda}}$ ***на каждый ковариантный индекс*** μ ***(*** $A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu\ldots\mu_n}$***) нужно прибавить член*** $-\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\rho\ldots\mu_n}$***, а на каждый контравариантный индекс*** ν ***(*** $A^{\nu_1\nu_2\ldots\nu\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu\ldots\mu_n}$ ***) нужно прибавить член*** $+\Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}A^{\nu_1\nu_2\ldots\rho\ldots\nu_m}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu\ldots\mu_n}$***.***

Ковариантные производные

Для скалярных величин ковариантные производные сводятся к обычным.

Ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная.

Контравариантные производные получаются из ковариантных путем поднятия индекса с помощью метрического тензора:

$$D^{\nu} A_{\mu} = g^{\nu\lambda} D_{\lambda} A_{\mu} \qquad D^{\nu} A^{\mu} = g^{\nu\lambda} D_{\lambda} A^{\nu}$$

Ковариантная производная метрического тензора равна нулю.

$$DA_{\mu} = g_{\mu\nu} DA^{\nu}$$

$$DA_{\mu} = D\left(g_{\mu\nu} A^{\nu}\right) = Dg_{\mu\nu} A^{\nu} + g_{\mu\nu} DA^{\nu}$$

$$Dg_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}\right) dx^{\lambda} = D_{\lambda} g_{\mu\nu} dx^{\lambda} = 0$$

$$D_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0$$

При ковариантном дифференцировании метрический тензор ведет себя как постоянная величина.

Символы Кристоффеля

$$D_\nu A'_\mu = \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} A'_\lambda \qquad D_\nu A'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} D_\rho A_\lambda$$

$$\frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} A'_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho\right) - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} D_\rho A_\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho\right) - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A_\sigma\right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\rho - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\rho} A_\sigma = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\rho - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho$$

$$-\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} A_\rho = \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} A_\rho - \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A_\rho$$

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma} + \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} = \Gamma'^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}$$

Символы Кристоффеля

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}+\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}=\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}$$

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}+\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}=\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}$$

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}+\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}$$

Величины $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ не являются тензорами – закон из преобразования отличается от закона преобразования тензоров третьего ранга.

Тензор кручения: $S^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$

$$S'^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}S^{\rho}_{\sigma\tau}$$

Метрический тензор в любой точке пространства-времени может быть приведен к виду, который он имеет в пространстве-времени Минковского, выбором системы координат. В этой системе координат все величины $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ равны нулю, и, следовательно, $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ также равны нулю. Но, поскольку $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ – тензор, его компоненты будут равны нулю в любой системе координат.

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$$

Символы Кристоффеля симметричны по своим нижним индексам.

В силу симметричности независимыми являются 40 из 64 величин $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\lambda,\,\mu\nu} = g_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho,\,\mu\nu} \qquad \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right\} \qquad \Gamma_{\lambda,\,\mu\nu} = \left[\begin{matrix} \mu\nu \\ \lambda \end{matrix} \right]$$

Найдем выражение символов Кристоффеля через метрический тензор.

$$D_{\lambda} g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}$$

$$-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = -\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 2\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} g_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

Символы Кристоффеля

Найдем выражение символов Кристоффеля через единичные векторы, образующие тетраду $e_a{}^\mu$.

Введем также четверку ***взаимных*** с ними (***дуальных***) векторов $e_\mu{}^a$, удовлетворяющих условиям

$$e_\mu^b e_a^\mu = \delta_a^b$$

$$e_b^\nu e_\mu^b e_a^\mu = e_b^\nu \delta_a^b = e_a^\nu \qquad \Longrightarrow \qquad e_b^\nu e_\mu^b = \delta_\mu^\nu$$

При параллельном переносе единичного вектора он остается единичным.

$$D_\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad D_\nu e_a^\mu = \Gamma^\mu_{\lambda\nu} e_a^\lambda$$

$$D_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad D_\nu e_\mu^a = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda^a$$

$$e_\mu^a D_\nu e_a^\lambda = \Gamma^\lambda_{\rho\nu} e_a^\rho e_\mu^a \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = e_\mu^a D_\nu e_a^\lambda$$

$$e_a^\lambda D_\nu e_\mu^a = -\Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho^a e_a^\lambda \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -e_a^\lambda D_\nu e_\mu^a$$

Символы Кристоффеля

Задание четверки единичных векторов полностью фиксирует геометрические свойства пространства в данной точке. Рассмотрим скалярные произведения различных векторов из тетрады:

$$g_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_b^{\nu} = \eta_{ab}$$

Элементы матрицы η_{ab} фактически определяют углы между тетрадными векторами в данной точке и, тем самым, определяют направления координатных линий.

$$g_{\mu\nu} e_a^{\mu} e_{\lambda}^{a} e_b^{\nu} e_{\rho}^{b} = \eta_{ab} e_{\lambda}^{a} e_{\rho}^{b}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_{\mu}^{a} e_{\nu}^{b}$$

Символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right) = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}}\right) = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}}$$

Дифференциал определителя метрического тензора:

$$dg = m^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu} = \frac{m^{\mu\nu}}{g} \qquad \Rightarrow \qquad dg = g g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \Rightarrow \qquad g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu} \qquad dg = -g g_{\mu\nu} dg^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = g g^{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} \qquad \Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial\left(\ln\sqrt{-g}\right)}{\partial x^{\mu}}$$

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\right)$$

Символы Кристоффеля

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right) = g^{\nu\lambda}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$g^{\mu\rho}\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} = -g_{\rho\nu}\frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}} \qquad\qquad g^{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\rho}}$$

$$g^{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = -g^{\nu\lambda}g_{\rho\nu}\frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} = -\delta^{\lambda}_{\rho}\frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\rho}} =$$

$$= -\frac{\partial g^{\mu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - g^{\mu\lambda}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\sqrt{-g} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\lambda}\right)$$

Символы Кристоффеля

$$D_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}A^\mu\right)$$

$$D_\nu A_\mu - D_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

$$D_\mu D^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}\right)$$

Для антисимметричного тензора $A^{\mu\nu}$:

$$D_\nu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}A^{\mu\nu}\right)$$

Для симметричного тензора $A_\mu{}^\nu$:

$$D_\nu A_\mu^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}A_\mu^\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}A^{\nu\lambda}$$

Уравнение геодезической

$$S = -mc\int_{t_1}^{t_2} ds$$

$$\delta(ds) = \frac{\delta\left(g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}\right)}{2\sqrt{g_{\lambda\rho}dx^{\lambda}dx^{\rho}}} = \frac{1}{2ds}\left[\delta g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + g_{\mu\nu}\delta\left(dx^{\mu}\right)dx^{\nu} + g_{\mu\nu}dx^{\mu}\delta\left(dx^{\nu}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2ds}\left[\delta g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} + 2g_{\mu\nu}dx^{\mu}\delta\left(dx^{\nu}\right)\right]$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\delta x^{\lambda} \qquad\qquad dx^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}ds$$

$$\delta S = -mc\int_{t_1}^{t_2}\delta(ds) = -\frac{1}{2}mc\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\delta x^{\lambda}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}ds + 2g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{d\left(\delta x^{\nu}\right)}{ds}ds\right] =$$

$$= -mc\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds}\delta x^{\lambda} + \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\delta x^{\nu}\right) - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\delta x^{\nu}\right]ds =$$

$$= -mc\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{ds}\delta x^{\nu}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - mc\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{dx^{\mu}}{ds}\frac{dx^{\nu}}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{ds}\right)\right]\delta x^{\lambda}ds$$

Уравнение геодезической

$$\delta S = -mc\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right)\right]\delta x^\lambda ds$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{d}{ds}\left(g_{\mu\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} - g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$$

$$g^{\rho\lambda}g_{\mu\lambda}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \qquad w^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} \qquad \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\right)$$

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0 \qquad w^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 0$$

В пространстве-времени частица перемещается вдоль экстремальной линии. Эта линия называется ***геодезической***. Понятие геодезической линии обобщает понятие прямой как кратчайшей линии между двумя точками плоского пространства.

Уравнение геодезической

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими.

$$g_{0i} = 0 \qquad g_{00} = 1$$

Временная координата, деленная на скорость света, представляет собой собственное время в каждой точке пространства:

$$\frac{x^0}{c} = \tau$$

Четырехмерная скорость представляет собой 4-вектор касательной к мировой линии частицы. Если частица покоится, мировая линия будет совпадать с координатной линией времени, и 4-скорость будет иметь компоненты

$$u^\mu = \left(1,\ 0,\ 0,\ 0\right)$$

В таком случае 4-вектор скорости удовлетворяет уравнениям геодезической.

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0$$

Эти линии нормальны к гиперповерхностям постоянного времени.

Ньютоновский предел

Функция Лагранжа релятивистской частицы: $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

В нерелятивистском пределе: $L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2}$

В присутствии гравитационного поля: $L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = -mc\int_{t_1}^{t_2}\left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt \qquad S = -mc\int_{t_1}^{t_2} ds \qquad ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)dt$$

$$ds^2 = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right)^2 dt^2 = \left(c^2 + \frac{v^4}{4c^2} + \frac{\varphi^2}{c^2} - v^2 + 2\varphi - \frac{v^2\varphi}{c^2}\right)dt^2 \approx$$

$$\approx \left[c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2\varphi\right]dt^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Постоянное гравитационное поле

Если существует система отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты, гравитационное поле называется ***постоянным***. Постоянным может быть поле, создаваемое только одним телом. В системе, состоящей из нескольких гравитирующих тел, тела не могут оставаться неподвижными вследствие гравитационного притяжения.

Постоянное гравитационное поле может быть ***статическим*** либо ***стационарным***. Статические гравитационные поля создаются неподвижными телами. В таком поле должно выполняться условие $g_{0i} = 0$.

Гравитационное поле будет оставаться постоянным и в случае, если создающее его тело, обладая аксиальной симметрией, будет равномерно вращаться вокруг своей оси.

Связь между собственным и мировым временем: $\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0$

Для слабого гравитационного поля: $\tau = \frac{x^0}{c}\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{c^2}} \approx \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$

Эффект замедления времени в гравитационном поле:

В более сильном гравитационном поле собственное время течет медленнее.

Постоянное гравитационное поле

Излучение света атомами в постоянном гравитационном поле:

ω_τ – частота, измеренная в собственном времени, ω_t – частота, измеренная в мировом времени.

$$\omega_\tau = \frac{\omega_t}{\sqrt{g_{00}}}$$

В слабом гравитационном поле

$$\omega_\tau = \frac{\omega_t}{\sqrt{1+\frac{2\varphi}{c^2}}} \approx \omega_t\left(1-\frac{\varphi}{c^2}\right)$$

Если луч света испущен в точке с гравитационным потенциалом φ_1, его частота, измеренная в собственном времени,

$$\omega_{\tau 1} \approx \omega_t\left(1-\frac{\varphi_1}{c^2}\right)$$

Достигнув точки с потенциалом φ_2, свет будет иметь частоту

$$\omega_{\tau 2} \approx \omega_t\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \frac{\omega_{\tau 1}}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \omega_{\tau 1}\left(1+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\right)$$

$$\Delta\omega = \omega_{\tau 2} - \omega_{\tau 1} \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\Delta\omega \approx -\frac{\Delta\varphi}{c^2}\omega_{\tau 1}$$

Постоянное гравитационное поле

Гравитационное красное смещение

$$\Delta\omega \approx -\frac{\Delta\varphi}{c^2}\omega_{\tau 1}$$

Если свет испускается в точке с большим по абсолютной величине гравитационным потенциалом, $|\varphi_1| > |\varphi_2|$, то $\Delta\omega < 0$, и частота смещается в сторону меньших частот, в красный участок спектра. Красное смещение испытывает свет, испущенный на Солнце или звездах (в области более сильного гравитационного поля) и наблюдаемый на Земле.

Если мы измеряем промежуток собственного времени в точках с потенциалами φ_1 и φ_2, соответственно,

$$\tau_1 \approx \frac{x^0}{c}\left(1+\frac{\varphi_1}{c^2}\right)$$

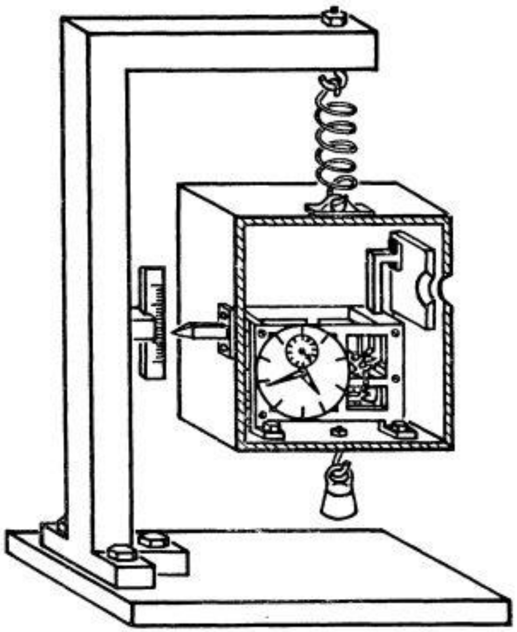
$$\tau_2 \approx \frac{x^0}{c}\left(1+\frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \frac{\tau_1}{1+\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1+\frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \tau_1\left(1+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{c^2}\right)$$

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$$

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_1} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}$$

Дискуссия Бора с Эйнштейном

$\Delta E \cdot \Delta \tau \geq \hbar$



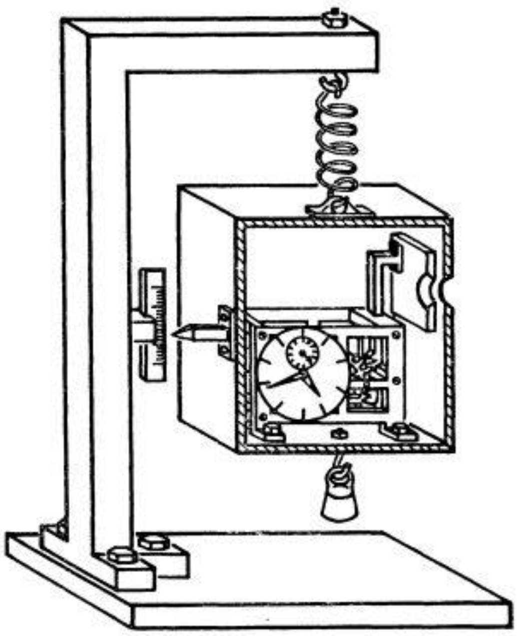
Рассмотрим подвешенный на пружинных весах ящик, наполненный электромагнитным излучением. На очень короткое время отверстие в ящике открывается, и из него выходит часть излучения.

Энергия эквивалентна массе, $E = mc^2$.

Взвешивая ящик, можно определить изменение массы ящика Δm и уменьшение энергии излучения $\Delta E = \Delta m\, c^2$.

Время прохождения излучения через отверстие может быть измерено с произвольной точностью, так что $\Delta \tau = 0$.

Дискуссия Бора с Эйнштейном



Необходимо показать, что время взвешивания не может быть определено со сколь угодно малой погрешностью.

В результате излучения фотона и уменьшения массы, изменяется координата ящика.

Δq - изменение координаты ящика;

$\Delta\varphi = g\Delta q$ – изменение потенциала;

$\Delta p \le \tau g \Delta m$ – неопределенность импульса.

Если гравитационный потенциал известен с точностью $\Delta\varphi$, точность измерения времени $\Delta\tau$ определяется формулой

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}$$

$$\Delta p \cdot \Delta q \ge \hbar \;\Rightarrow\; \Delta q \ge \frac{\hbar}{\Delta p} \ge \frac{\hbar}{\tau g \Delta m} \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\tau}{\tau} \approx \frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{g\Delta q}{c^2} \ge \frac{g\hbar}{\tau g \Delta m \cdot c^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Delta\tau \ge \frac{\hbar}{\Delta m \cdot c^2} \;\Rightarrow\; \Delta E \cdot \Delta\tau \ge \hbar$$

Постоянное гравитационное поле

В постоянном гравитационном поле сохраняется энергия частицы.

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c},\ \mathbf{p} \right) \qquad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c},\ -\mathbf{p} \right) \qquad p_{\mu} = -\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} \qquad \Rightarrow \qquad p_0 = -\frac{\partial S}{\partial x^0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}$$

Следует определить энергию как умноженную на скорость света нулевую ковариантную компоненту 4-вектора импульса, поскольку эта компонента выражается через производную действия по временной координате; в уравнении Гамильтона – Якоби эта производная ассоциируется с энергией.

В статическом поле $g_{0i} = 0$

$$E = cp_0 = mc^2 u_0 = mc^2 g_{0\mu} u^{\mu} = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2}} = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0} \right)^2}}$$

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dl}{dx^0} \qquad E = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Тензор кривизны

В искривленном пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую может совершаться вдоль различных путей, соединяющих эти две точки. Результат будет зависеть от выбранного пути.

Если перенести вектор параллельно самому себе по замкнутому контуру, то, возвратившись в первоначальную точку, он не обязательно совпадет с самим собой.

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu dx^\lambda$$

Обобщение теоремы Стокса на четырехмерный случай:

$$\oint \mathbf{A}d\mathbf{l} = \int \mathrm{rot}\,\mathbf{A}d\mathbf{S} \qquad \oint A_i dx^i = \int e^{ijk} \nabla_j A_k dS_i \qquad dS_i = n_i dS \qquad dS^{jk} = e^{ijk} dS_i$$

$$\int e^{ijk} \nabla_j A_k dS_i = \int \nabla_j A_k dS^{jk} = \frac{1}{2} \int \left(\nabla_j A_k - \nabla_k A_j \right) dS^{jk}$$

$$\Rightarrow \qquad \oint A_\mu dx^\mu = \frac{1}{2} \int \left(\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \right) dS^{\mu\nu}$$

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu dx^\lambda = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu \right) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma^\nu_{\mu\rho} A_\nu \right) \right] dS^{\rho\lambda}$$

Тензор кривизны

$$\Delta A_\mu = \oint \Gamma^\nu_{\mu\lambda} A_\nu dx^\lambda = \frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^\nu_{\mu\lambda}A_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\nu_{\mu\rho}A_\nu\right)\right]dS^{\rho\lambda}$$

Подынтегральное выражение может быть вынесено за знак интеграла, если мы считаем, что его значение одинаково во всех точках внутри контура с точностью до бесконечно малых второго порядка:

$$\Delta A_\mu \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^\nu_{\mu\lambda}A_\nu\right) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\Gamma^\nu_{\mu\rho}A_\nu\right)\right]\Delta S^{\rho\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho}A_\nu - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda}A_\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\rho} - \Gamma^\nu_{\mu\rho}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\lambda}\right)\Delta S^{\rho\lambda}$$

$$D_\nu A_\mu \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \approx \Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda$$

$$\Delta A_\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho}A_\nu - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda}A_\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}A_\sigma - \Gamma^\nu_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}A_\sigma\right)\Delta S^{\rho\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\right)A_\nu\Delta S^{\rho\lambda} = \frac{1}{2}R^\nu{}_{\mu\rho\lambda}A_\nu\Delta S^{\rho\lambda}$$

Тензор кривизны, или ***тензор Римана***:

$$R^\nu{}_{\mu\rho\lambda} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$$

Тензор кривизны

При обходе замкнутого контура $\Delta\left(A^{\mu}B_{\mu}\right)=0$

$$\Delta\left(A^{\mu}B_{\mu}\right)=B_{\mu}\Delta A^{\mu}+A^{\mu}\Delta B_{\mu}=B_{\mu}\Delta A^{\mu}+\frac{1}{2}A^{\mu}R^{\nu}{}_{\mu\rho\lambda}B_{\nu}\Delta S^{\rho\lambda}=B_{\mu}\left(\Delta A^{\mu}+\frac{1}{2}A^{\nu}R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda}\Delta S^{\rho\lambda}\right)$$

$$\Delta A^{\mu}=-\frac{1}{2}A^{\nu}R^{\mu}{}_{\nu\rho\lambda}\Delta S^{\rho\lambda}$$

Тензор кривизны входит также в формулу для коммутатора ковариантных производных

$$D_{\lambda}D_{\nu}A_{\mu}-D_{\nu}D_{\lambda}A_{\mu}=R^{\rho}{}_{\mu\nu\lambda}A_{\rho}$$

$$D_{\lambda}D_{\nu}A^{\mu}-D_{\nu}D_{\lambda}A^{\mu}=-R^{\mu}{}_{\rho\nu\lambda}A^{\rho}$$

Тензор кривизны

$$D_\lambda D_\nu A_\mu - D_\nu D_\lambda A_\mu = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} A_\rho$$

$$D_\lambda\left(D_\nu A_\mu\right) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(D_\nu A_\mu\right) - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} D_\nu A_\rho - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} D_\rho A_\mu =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} A_\rho\right) - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\nu} - \Gamma^\sigma_{\rho\nu} A_\sigma\right) - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} A_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma$$

$$D_\lambda D_\nu A_\mu - D_\nu D_\lambda A_\mu = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} A_\rho + \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} A_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\nu} -$$

$$- \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial A_\rho}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\lambda} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\rho} A_\sigma =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} A_\rho - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} A_\rho + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} A_\rho - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} A_\rho =$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\rho_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right) A_\rho = R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} A_\rho$$

Тензор кривизны

В плоском пространстве тензор кривизны равен нулю, поскольку можно выбрать (декартову) систему координат, в которой символы Кристоффеля равны нулю. В силу тензорного характера тензор Римана будет равен нулю в любой другой системе координат.

Обратно, если тензор Римана равен нулю в каждой точке пространства, оно является плоским. В любой точке пространства-времени можно выбрать систему координат, такую, что метрический тензор в этой системе координат будет иметь тот же вид, что и в пространстве-времени Минковского.

Если тензор Римана равен нулю, можно осуществить параллельный перенос системы координат внутри бесконечно малой окрестности. Поскольку в точке, куда будет перенесена система координат, тензор Римана также будет равен нулю, систему координат можно перенести дальше, и таким образом построить галилееву систему координат во всем пространстве.

Равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, однозначно определяющим, является пространство плоским или искривленным.

Тензор кривизны

Ковариантные компоненты тензора кривизны:

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\sigma} R^{\sigma}{}_{\nu\lambda\rho}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}} \right) + g_{\sigma\tau}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\tau}_{\mu\rho} - g_{\sigma\tau}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\Gamma^{\tau}_{\mu\lambda}$$

$$R^{\nu}{}_{\mu\rho\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\nu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\tau}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=g_{\mu\tau}\left(\frac{\partial\Gamma^{\tau}_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma^{\tau}_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}+\Gamma^{\tau}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}-\Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\right)$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}g_{\mu\tau}\frac{\partial g^{\tau\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right)+\frac{1}{2}g_{\mu\tau}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\rho}}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\sigma}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\tau}\frac{\partial g^{\tau\sigma}}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right)-\frac{1}{2}g_{\mu\tau}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g_{\mu\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g_{\mu\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}g_{\mu\tau}\frac{\partial g^{\tau\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right)+\frac{1}{2}g_{\mu\tau}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\rho}}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\sigma}}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\tau}\frac{\partial g^{\tau\sigma}}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right)-\frac{1}{2}g_{\mu\tau}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g_{\mu\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g_{\mu\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\lambda}}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\rho}}g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\sigma}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\rho}}+\frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\lambda}} g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\rho}} g^{\tau\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}\left(\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\delta^{\alpha}_{\mu} g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\delta^{\alpha}_{\mu} g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\mu}}\right) -$$

$$-\frac{1}{2} g^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right) + \frac{1}{2} g^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right) +$$

$$+\frac{1}{4} g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\beta}}\right) -$$

$$-\frac{1}{4} g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho \partial x^\nu}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho \partial x^\mu}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}g^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)+\frac{1}{2}g^{\sigma\beta}\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g^{\sigma\beta}\left(-\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\sigma}-\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\delta_\sigma^\alpha g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\alpha g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\rho}-\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\delta_\sigma^\alpha g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\delta_\sigma^\alpha g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\rho}-\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\mu}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}g_{\sigma\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}g_{\sigma\tau}g^{\tau\alpha}g^{\sigma\beta}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\rho}+\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\alpha}\right)\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\right)+g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\tau_{\mu\rho}-g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}$$

Тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}+\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}-\frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}\right)+g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\tau_{\mu\rho}-g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=-R_{\nu\mu\lambda\rho}=-R_{\mu\nu\rho\lambda}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=R_{\lambda\rho\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}+R_{\mu\rho\nu\lambda}+R_{\mu\lambda\rho\nu}=0$$

Тензор Риччи: $$R_{\mu\nu}=g^{\lambda\rho}R_{\lambda\mu\rho\nu}=R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$$

$$R^\nu{}_{\mu\rho\lambda}=\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\lambda}}{\partial x^\rho}-\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\rho}}{\partial x^\lambda}+\Gamma^\nu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}-\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$$

$$R_{\mu\nu}=R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}=\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}+\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}-\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}$$

$$R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}$$

Скалярная кривизна пространства:

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho}$$

Тензор кривизны

Тождества Бианки:

$$D_\sigma R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} + D_\lambda R^\rho{}_{\mu\sigma\nu} + D_\nu R^\rho{}_{\mu\lambda\sigma} = 0$$

В силу тензорного характера достаточно доказать тождество в одной системе координат, тогда оно будет справедливо и в любой другой. В качестве системы координат мы выберем такую, в которой все символы Кристоффеля обращаются в нуль. В силу принципа эквивалентности мы можем исключить гравитационное поле в бесконечно малой области пространства выбором системы координат, а это подразумевает, что в этой системе координат $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$. Такая система координат называется ***локально-инерциальной*** или ***локально-геодезической.***

$$D_\sigma R^\rho{}_{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\rho_{\tau\sigma} R^\tau{}_{\mu\nu\lambda} - \Gamma^\tau_{\mu\sigma} R^\rho{}_{\tau\nu\lambda} - \Gamma^\tau_{\nu\sigma} R^\rho{}_{\mu\tau\lambda} - \Gamma^\tau_{\lambda\sigma} R^\rho{}_{\mu\nu\tau}$$

$$\left[\frac{\partial R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial R^\rho{}_{\mu\lambda\sigma}}{\partial x^\nu}\right]\Bigg|_{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial R^\rho{}_{\mu\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial R^\rho{}_{\mu\lambda\sigma}}{\partial x^\nu}\right]\Bigg|_{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0} = \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 \Gamma^\rho_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} = 0$$

Тензор кривизны

Следствия тождеств Бианки:

$$D_\sigma\left(g^{\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}\right)+D_\lambda\left(g^{\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\nu}\right)+D_\nu\left(g^{\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\sigma}\right)=$$

$$=-D_\sigma\left(g^{\mu\nu}R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}\right)+D_\lambda\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}R_{\mu\rho\nu\sigma}\right)+D_\nu\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\sigma}\right)=$$

$$=-D_\sigma\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)+D_\lambda\left(g^{\lambda\rho}R_{\rho\sigma}\right)+D_\nu\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\sigma}\right)=$$

$$=-D_\sigma R+D_\lambda R^{\lambda}_{\sigma}+D_\nu R^{\nu}_{\sigma}=-D_\sigma R+2D_\lambda R^{\lambda}_{\sigma}=0$$

$$D_\nu\left(R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R\right)=0$$

Поиск уравнений гравитационного поля

Уравнения гравитационного поля должны быть уравнениями второго порядка относительно компонент метрического тензора.

Каким должен быть вид уравнений поля в отсутствие вещества?

Если потребовать, чтобы тензор Римана обращался в нуль,

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$$

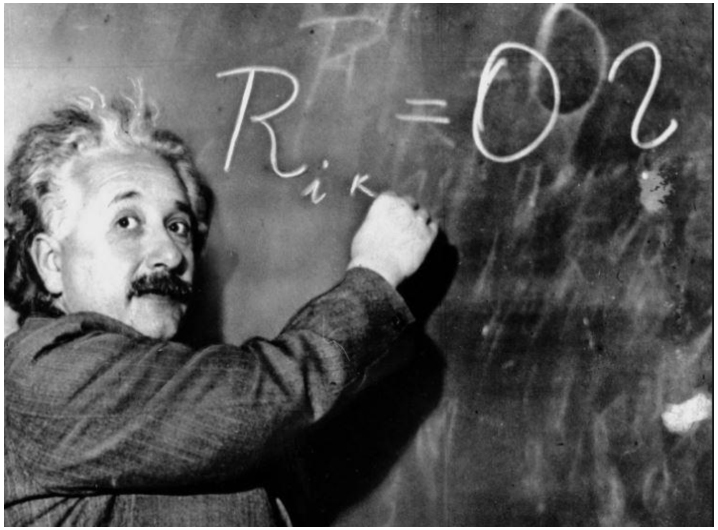
это будет означать, что пространство-время должно быть плоским.

Эйнштейн делает свой выбор в пользу тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Эти уравнения представляют собой 10 уравнений для 10 величин $g_{\mu\nu}$. Они выполняются и в частном случае, когда пространство-время плоское.

Следующий шаг – записать уравнения поля в присутствии источников.



Тензор энергии-импульса в отсутствие гравитационного поля

$$\mathrm{L} \equiv \mathrm{L}\left(Q,\ \partial_\mu Q\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0 \qquad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial Q} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\mu Q\right)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} - \delta_\mu^\nu \mathrm{L}\right) = 0 \qquad T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\partial_\nu Q\right)}\frac{\partial Q}{\partial x^\mu} - \delta_\mu^\nu \mathrm{L} \qquad \frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\int \frac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} d^4 x = \oint T_\mu^\nu dS_\nu = \int_{S_1} T_\mu^\nu dS_\nu + \int_{S_2} T_\mu^\nu dS_\nu = 0$$

$$dS_\mu = n_\mu dS$$

$$\int_{S_1} T_\mu^0 n_0 dS - \int_{S_2} T_\mu^0 n_0 dS = \int d^3 x\ T_\mu^0\left(t_1\right) - \int d^3 x\ T_\mu^0\left(t_2\right) = 0$$

Тензор энергии-импульса в отсутствие гравитационного поля

Выясним смысл компонент тензора энергии-импульса.

$$T_0^0 = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{Q}}\dot{Q} - \mathrm{L} = P\dot{Q} - \mathrm{L} = \mathrm{H}$$

Это по определению плотность функции Гамильтона (плотность энергии).

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T_0^0}{\partial t} + \frac{\partial T_0^i}{\partial x^i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} d^3x = -c\oint T^{0i} dS_i$$

В левой части стоит изменение во времени энергии, в правой – поток энергии, протекающий через поверхность, охватывающую рассматриваемый объем. Компоненты T^{0i}, умноженные на скорость света, представляют собой плотность потока энергии (которая равна плотности импульса, умноженной на квадрат скорости света).

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T_i^0}{\partial t} + \frac{\partial T_i^j}{\partial x^j} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{0i} d^3x = -\oint T^{ij} dS_j$$

В левой части стоит изменение во времени импульса системы, в правой – поток импульса. Компоненты T^{ij} представляют собой плотность потока импульса; эти пространственные компоненты составляют (взятый с противоположным знаком) трехмерный тензор напряжений.

Поиск уравнений гравитационного поля

Дифференциальная форма законов сохранения $\dfrac{\partial T_\mu^\nu}{\partial x^\nu} = 0$

в криволинейных координатах уже не справедлива и должна быть заменена уравнениями

$$D_\nu T_\mu^\nu = 0$$

Эти уравнения, вообще говоря, не выражают законы сохранения.

Эйнштейн предполагал, что такие соотношения должны быть следствием уравнений гравитационного поля. Проще всего записать эти уравнения, воспользовавшись следствием тождеств Бианки.

$$D_\nu \left(R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R \right) = 0$$

Мы имеем две тензорных величины, ковариантные производные которых равны нулю. Одна из них характеризует геометрические свойства пространства-времени, вторая – свойства материи как источника гравитационного поля. Приравнивая их друг другу, получаем уравнения

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = \kappa T_\mu^\nu \quad \Leftrightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Поиск уравнений гравитационного поля

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R = \kappa T_\mu^\nu \quad \Rightarrow \quad -R = \kappa T \quad \Rightarrow \quad R_\mu^\nu = \kappa\left(T_\mu^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu T\right)$$

Постоянная κ может быть определена из требования, чтобы в пределе слабого гравитационного поля мы получили ньютоновский закон всемирного тяготения.

Тензор энергии импульса макроскопических тел

$$T_\mu^\nu = \left(p + \varepsilon\right)u_\mu u^\nu - p\delta_\mu^\nu$$

В системе покоя $u^\mu = \left(1,\ 0,\ 0,\ 0\right)$ $\quad T_0^0 = \varepsilon$

$$F_i = -\sigma_{ij} dS_j$$
$$F_i = p dS_i$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad T_0^0 = m_0 c^2 = \rho c^2 \qquad T = T_0^0$$

$$R_0^0 = \kappa\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right)$$

Поиск уравнений гравитационного поля

$$R_0^0 = \kappa\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) \qquad g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} \qquad R_0^0 = g^{00}R_{00} \approx g^{00}\frac{\partial\Gamma^i_{00}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\right)$$

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_i} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

$$R_0^0 \approx g^{00}\frac{\partial\Gamma^i_{00}}{\partial x^i} \approx -\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x^i} = \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$$

$$T_0^0 = \rho c^2 \qquad T = T_0^0 \qquad \Delta\varphi = \frac{1}{2}\kappa\rho c^4 \qquad \Delta\varphi = 4\pi G_N\rho \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$$

Поиск уравнений гравитационного поля

На основе уравнений Эйнштейна

- в пределе слабого поля получается закон всемирного тяготения Ньютона;
- получается правильное значение векового смещения перигелия Меркурия, которое ньютоновская теория гравитации не могла объяснить;
- экспедиция Эддингтона блестяще подтвердила предсказанное Эйнштейном искривление лучей света в гравитационном поле Солнца;
- были проведены эксперименты по проверке замедления хода часов в гравитационном поле (эксперимент Р. Паунда и Г. Ребки в 1959–1960 годах в Гарвардском университете).

Получение уравнений гравитационного поля из принципа наименьшего действия

При выводе уравнений Эйнштейна из принципа наименьшего действия вместо качественных соображений, определяющих форму уравнений поля, нам потребуются качественные соображения, определяющие форму гравитационного действия.

Действие должно быть выражено через интеграл по всему трехмерному пространству и некоторому промежутку времени, инвариантный относительно преобразований координат.

Инвариантный элемент объема есть $\sqrt{-g}\,d^4x$

$$\Rightarrow \qquad \int G\sqrt{-g}\,d^4x$$

G – некоторый скаляр (инвариантная величина). В качестве такой величины мы можем выбрать скалярную кривизну R.

Уравнения поля должны быть уравнениями второго порядка относительно компонент метрического тензора. Для этого инвариантная величина G должна содержать производные первого порядка от компонент метрического тензора, т.е. содержать сами эти компоненты и символы Кристоффеля. Однако из одних только компонент метрического тензора и символов Кристоффеля не удается построить инвариантную величину.

Получение уравнений гравитационного поля из принципа наименьшего действия

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G_N}\int R\sqrt{-g}\,d^4x$$

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x = \delta\int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,d^4x = \int\left(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\right)d^4x$$

$$dg = -g g_{\mu\nu}dg^{\mu\nu} \qquad\qquad \delta g = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x = \int\left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\right]d^4x$$

Проведем вычисления в локально-инерциальной системе координат, в которой $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\right)\Bigg|_{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0} =$$

$$= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}$$

Получение уравнений гравитационного поля из принципа наименьшего действия

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\right)$$

$$B^{\lambda}=g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}$$

Изменение некоторого вектора A_μ при бесконечно малом параллельном переносе есть $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}dx^{\nu}$, и эта величина является вектором. Тогда $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}dx^{\nu}$ – это разность двух векторов, полученных в результате двух бесконечно малых параллельных переносах с различными $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$. Следовательно, хотя символы Кристоффеля сами не являются тензорами, их вариации являются таковыми. Это доказывает, что B^{λ} действительно является вектором.

$$D_{\nu}B^{\mu}\Big|_{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0}=\left(\frac{\partial B^{\mu}}{\partial x^{\nu}}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}B^{\lambda}\right)\Bigg|_{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0}=\frac{\partial B^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=\frac{\partial B^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}B^{\mu}\right)$$

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=\int\left[\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}B^{\mu}\right)\right]d^4x$$

Получение уравнений гравитационного поля из принципа наименьшего действия

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G_N}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d^4x$$

Мы должны еще добавить вариацию действия для полей материи, которая выражается через тензор энергии-импульса материи:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d^4x$$

$$\delta S = -\frac{c^3}{16\pi G_N}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} d^4x = 0$$

$$\Rightarrow \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$$

Структура уравнений Эйнштейна

Уравнения гравитационного поля содержат в себе уравнения движения материальных частиц. Это означает, что распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, не может быть задано произвольно, а должно быть определено вместе с самим создаваемым материей полем при решении уравнений гравитационного поля с заданными начальными условиями.

Уравнения Эйнштейна представляют собой 10 уравнений в частных производных относительно 10 неизвестных компонент метрического тензора. Для их решения следовало бы задать значения всех компонент метрического тензора и их производных по времени в начальный момент времени в каждой точке пространства.

$$R_{0000} = 0$$
$$R_{0i00} = 0$$
$$R_{000i} = 0$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} - \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \right) + g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\Gamma^\tau_{\mu\rho} - g_{\sigma\tau}\Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\tau_{\mu\lambda}$$

Вторые производные по времени содержатся только в компонентах R_{0i0j}, причем эти компоненты содержат вторые производные по времени только от пространственных компонент метрического тензора g_{ij}. Вторые производные по времени от компонент $g_{0\mu}$ вообще не входят в тензор Римана, а также в тензор Риччи и скалярную кривизну; они вовсе не входят в уравнения Эйнштейна.

Структура уравнений Эйнштейна

Вторые производные по времени от компонент g_{ij} не входят в уравнения

$$R^0_\mu - \frac{1}{2}\delta^0_\mu R = \kappa T^0_\mu$$

$$D_0\left(R^0_\mu - \frac{1}{2}\delta^0_\mu R\right) = -D_i\left(R^i_\mu - \frac{1}{2}\delta^i_\mu R\right)$$

Для системы уравнений Эйнштейна нельзя поставить задачу Коши, т. е. невозможно однозначно определить все компоненты метрического тензора, задавая их значения и первые производные по времени в начальный момент времени.

Четыре из десяти уравнений Эйнштейна ((0μ)-уравнения), не содержащие вторых производных по времени, являются ***уравнениями связи***. При наличии уравнений связи задача Коши для системы дифференциальных уравнений не имеет единственного решения.

Общее решение уравнений Эйнштейна будет зависеть от четырех произвольных функций; число произвольных функций равно числу уравнений связи. Такая структура уравнений Эйнштейна связана с тем, что мы можем подвергать пространственно-временные координаты преобразованиям, которые также зависят от четырех произвольных функций. Действие для гравитации и полей материи имеет форму, инвариантную относительно данных преобразований.

Структура уравнений Эйнштейна

Чтобы ограничить произвол в выборе этих функций, на компоненты метрического тензора накладываются четыре дополнительных условия, называемых ***калибровочными условиями***. Как правило, они накладываются на $g_{0\mu}$-компоненты метрического тензора и фиксируют систему отсчета. После фиксации четырех из десяти компонент метрического тензора остальные шесть могут быть однозначно определены с помощью уравнений Эйнштейна, содержащих вторые производные по времени.

Инвариантность действия относительно преобразований координат и наличие связей в числе уравнений Эйнштейна позволяют отнести общую теорию относительности к ***теориям со связями*** или ***калибровочным теориям***. Характерная особенность этих теорий – инвариантность относительно некоторой группы преобразований.

Как правило, в калибровочных теориях наблюдаемые величины остаются инвариантными относительно упомянутой группы преобразований.

Структура уравнений Эйнштейна

Общая теория относительности является ***ковариантной*** теорий, что означает, что уравнения Эйнштейна сохраняют свою форму в любой системе отсчета. Однако наблюдаемые и измеримые физические величины принимают разные значения в разных системах отсчета.

Зафиксировав систему отсчета и решив уравнения Эйнштейна, мы можем определить значения физических величин. Мы можем вычислить значения тех же физических величин в любой другой системе отсчета, проведя соответствующее преобразование координат. Без фиксации системы отсчета мы не получим решения уравнений Эйнштейна в однозначной форме.

Материя может быть представлена физическими полями, макроскопическими телами либо некоторой средой, заполняющей все пространство. Среда характеризуется плотностью энергии, давлением и скоростью в каждой точке пространства в каждый момент времени. Плотность энергии, давление и 4-скорость являются неизвестными величинами, которые должны быть определены при решении уравнений Эйнштейна. Четыре дополнительных величины (плотность энергии или давление и три компоненты 4-скорости) могут быть определены, наряду с шестью компонентами метрического тензора, при решении 10 уравнений Эйнштейна.

Изотропные космологические модели

Предположим, что пространство является однородным и изотропным на космических масштабах – масштабах, превышающих размеры звездных систем, галактик и даже скоплений галактик. Это требование еще не определяет полностью космологическую модель: пространство, удовлетворяющее этим требованиям, может иметь положительную, отрицательную или нулевую кривизну.

Пространство положительной кривизны:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

Это уравнение трехмерной гиперповерхности, являющейся аналогом двумерной сферы и вложенной в четырехмерное. Величина a выполняет роль радиуса гиперсферы. В космологии параметр $a(t)$ называется ***масштабным фактором***, поскольку он показывает, как с течением времени меняется расстояние между фиксированными точками.

$$dl^2 = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Изотропные космологические модели

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

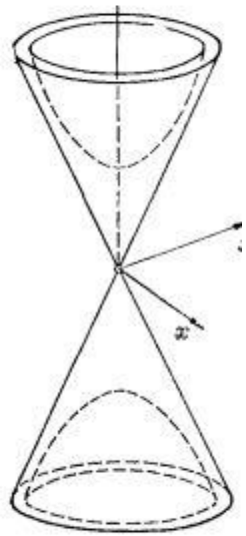
$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)\sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Найдем объем пространства с положительной кривизной:

$$V = \int\sqrt{-\gamma}d^3x = a^3\int_0^\pi \sin^2\chi d\chi\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi^2a^3$$

Объем пространства является конечным, при этом пространство не имеет границ. Изотропную однородную модель с положительной кривизной пространства называют ***замкнутой*** (или ***закрытой***) изотропной моделью.

Изотропные космологические модели



Пространство отрицательной кривизны:

Двуполостный гиперболоид (***псевдосфера*** радиуса *r*):

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = r^2$$

Верхней и нижней частям гиперболоида соответствуют положительные и отрицательные значения *r*.

Обобщение на случай трехмерного пространства:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = a^2$$

$$dl^2 = a^2\left[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Объем пространства является бесконечным.

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \operatorname{sh}^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Изотропную однородную модель с отрицательной кривизной пространства называют ***открытой*** изотропной моделью.

Пространство нулевой кривизны:

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Замкнутая изотропная модель

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)\sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$\Gamma^0_{00}=\frac{\dot N}{N};\quad \Gamma^0_{11}=\frac{a\dot a}{N^2};\quad \Gamma^0_{22}=\frac{a\dot a\sin^2\chi}{N^2};\quad \Gamma^0_{33}=\frac{a\dot a\sin^2\chi\sin^2\theta}{N^2}$$

$$\Gamma^1_{01}=\Gamma^1_{10}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^1_{22}=-\sin\chi\cos\chi;\quad \Gamma^1_{33}=-\sin\chi\cos\chi\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{02}=\Gamma^2_{20}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\mathrm{ctg}\,\chi;\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{03}=\Gamma^3_{30}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\mathrm{ctg}\,\chi;\quad \Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\mathrm{ctg}\,\theta$$

Замкнутая изотропная модель

Найдем смешанные компоненты тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}$$

$$R^0_0 = -3\frac{\ddot a}{N^2 a} + 3\frac{\dot N \dot a}{N^3 a} \qquad R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{\ddot a}{N^2 a} + \frac{\dot N \dot a}{N^3 a} - \frac{2\dot a^2}{N^2 a^2} - \frac{2}{a^2}$$

Вычислим скалярную кривизну:

$$R = -6\left[\frac{\ddot a}{N^2 a} - \frac{\dot N \dot a}{N^3 a} + \frac{\dot a^2}{N^2 a^2} + \frac{1}{a^2}\right]$$

Гравитационная часть действия:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G_N}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\pi} d\chi \sin^2\chi\, 6Na^3\left(\frac{\ddot a}{N^2 a} - \frac{\dot N \dot a}{N^3 a} + \frac{\dot a^2}{N^2 a^2} + \frac{1}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{3c^3}{8\pi G_N} 2\pi^2 \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{a^2 \ddot a}{N} - \frac{\dot N a^2 \dot a}{N^2} + \frac{a\dot a^2}{N} + Na\right) = \frac{3\pi c^3}{4G_N}\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2 \dot a}{N}\right) - \frac{a\dot a^2}{N} + Na\right] =$$

$$= \frac{3\pi c^3}{4G_N}\left[\left.\frac{a^2\dot a}{N}\right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\frac{a\dot a^2}{N} + Na\right)\right] = \frac{3\pi c^3}{4G_N}\int_{t_1}^{t_2} dt\left(-\frac{a\dot a^2}{N} + Na\right)$$

Замкнутая изотропная модель

Материя представляет собой некую среду, феноменологически описываемую действием

$$S_m = -\frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{\pi} d\chi \sin^2\chi N a^3 \varepsilon(a) = -\frac{2\pi^2}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\, N a^3 \varepsilon(a)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)\sin^2\chi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)\sin^2\chi\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

$$\delta g^{00} = -\frac{2\delta N}{N^3} \quad \Rightarrow \quad \delta N = -\frac{1}{2}N^3\delta g^{00}$$

$$\delta g^{11} = \frac{2\delta a}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \delta a = \frac{1}{2}a^3\delta g^{11}$$

$$\delta g^{22} = \frac{2\delta a}{a^3\sin^2\chi} \quad \Rightarrow \quad \delta a = \frac{1}{2}a^3\sin^2\chi\delta g^{11}$$

$$\delta g^{33} = \frac{2\delta a}{a^3\sin^2\chi\sin^2\theta} \quad \Rightarrow \quad \delta a = \frac{1}{2}a^3\sin^2\chi\sin^2\theta\delta g^{33}$$

$$\delta a = \frac{1}{6}a^3\left(\delta g^{11} + \sin^2\chi\delta g^{22} + \sin^2\chi\sin^2\theta\delta g^{33}\right)$$

Замкнутая изотропная модель

$$\delta a = \frac{1}{6}a^3\left(\delta g^{11} + \sin^2\chi\delta g^{22} + \sin^2\chi\sin^2\theta\delta g^{33}\right)$$

$$\delta S_m = -\frac{2\pi^2}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\left[a^3\varepsilon(a)\delta N + N\left(3a^2\varepsilon(a) + a^3\varepsilon'(a)\right)\delta a\right] =$$

$$= \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{1}{Na^3}\left[\frac{1}{2}a^3\varepsilon(a)N^3\delta g^{00} - \frac{1}{6}Na^3\left(3a^2\varepsilon(a) + a^3\varepsilon'(a)\right)\left(\delta g^{11} + \sin^2\chi\delta g^{22} + \sin^2\chi\sin^2\theta\delta g^{33}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2c}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\varepsilon(a)N^2\delta g^{00} - \left(a^2\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a^3\varepsilon'(a)\right)\left(\delta g^{11} + \sin^2\chi\delta g^{22} + \sin^2\chi\sin^2\theta\delta g^{33}\right)\right]$$

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu}d^4x$$

$$T_{00} = N^2\varepsilon(a); \quad T_0^0 = g^{00}T_{00} = \varepsilon(a)$$

$$T_{11} = -a^2\varepsilon(a) - \frac{1}{3}a^3\varepsilon'(a); \quad T_1^1 = g^{11}T_{11} = \varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)$$

$$T_{22} = -\left[a^2\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a^3\varepsilon'(a)\right]\sin^2\chi; \quad T_2^2 = g^{22}T_{22} = \varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)$$

$$T_{33} = -\left[a^2\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a^3\varepsilon'(a)\right]\sin^2\chi\sin^2\theta; \quad T_3^3 = g^{33}T_{33} = \varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)$$

Замкнутая изотропная модель

Уравнения Эйнштейна:

$$R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_0^0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a)$$

$$R_1^1 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_1^1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\ddot{a}}{N^2a} - \frac{2\dot{N}\dot{a}}{N^3a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\left[\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)\right]$$

Те же уравнения можно получить, варьируя полное действие

$$S = \frac{\pi c^3}{4G_N}\int_{t_1}^{t_2} dt\left(-\frac{3a\dot{a}^2}{N} + 3Na - \frac{8\pi G_N}{c^4}Na^3\varepsilon(a)\right)$$

$$\frac{3a\dot{a}^2}{N^2} + 3a - \frac{8\pi G_N}{c^4}a^3\varepsilon(a) = 0$$

$$\frac{6a\ddot{a}}{N} - \frac{6\dot{N}a\dot{a}}{N^2} + \frac{3\dot{a}^2}{N} + 3N - \frac{8\pi G_N}{c^4}\left[3Na^2\varepsilon(a) + Na^3\varepsilon'(a)\right] = 0$$

Замкнутая изотропная модель

Тензор энергии-импульса: $\sigma_i^j = p\delta_i^j$

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$p = -\varepsilon(a) - \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)$$

$$\varepsilon(a) = \frac{\varepsilon_0}{a^n} \qquad p = \left(\frac{n}{3} - 1\right)\varepsilon$$

- n=0 соответствует включению в уравнения Эйнштейна космологической постоянной ($\varepsilon(a)=\varepsilon_0$=const; уравнение состояния $p=-\varepsilon$);
- n=3 соответствует пылевидной материи (p=0);
- n=4 соответствует излучению, которое можно рассматривать как газ ультрарелятивистских частиц (уравнение состояния $p=1/3\varepsilon$).

Замкнутая изотропная модель

Для решения уравнений Эйнштейна необходимо, во-первых, определить функцию $N(t)$ (наложить калибровочное условие), во-вторых, задать зависимость $\varepsilon(a)$ либо уравнение состояния.

Калибровочное условие выберем в виде $N=1$

$$\frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon$$

$$\frac{2\ddot{a}}{N^2a}-\frac{2\dot{N}\dot{a}}{N^3a}+\frac{\dot{a}^2}{N^2a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{c^4}\left[\varepsilon(a)+\frac{1}{3}a\varepsilon'(a)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=-\frac{8\pi G_N}{c^4}p$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a}+\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon=-\frac{8\pi G_N}{c^4}p$$

$$\ddot{a}=-\frac{4\pi G_N}{3c^4}(\varepsilon+3p)a$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2\dot{a}\ddot{a}}{a^2}-\frac{2\dot{a}^3}{a^3}-\frac{2\dot{a}}{a^3}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\dot{\varepsilon}$$

Замкнутая изотропная модель

$$\frac{2\dot a\ddot a}{a^2}-\frac{2\dot a^3}{a^3}-\frac{2\dot a}{a^3}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\dot\varepsilon$$

$$\ddot a=-\frac{4\pi G_N}{3c^4}(\varepsilon+3p)a$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\dot\varepsilon a^3=-\frac{8\pi G_N}{3c^4}(\varepsilon+3p)\dot a a^2-2\left(\dot a^3+\dot a\right)$$

$$\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \dot a^3+\dot a=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon\dot a a^2 \qquad \dot\varepsilon a^3+3(\varepsilon+p)\dot a a^2=0$$

Последнее уравнение позволяет, зная уравнение состояния, определить зависимость $\varepsilon(a)$.

$$p=\left(\frac{n}{3}-1\right)\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \dot\varepsilon a+n\varepsilon\dot a=0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(a)=\frac{\varepsilon_0}{a^n}$$

Найдем зависимость масштабного фактора от времени.

n=0 (космологическая постоянная):

$$\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 \qquad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0=\Lambda^2 \qquad \frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\Lambda^2 \qquad \dot a^2=\Lambda^2a^2-1$$

$$t=\int\frac{da}{\sqrt{\Lambda^2a^2-1}}=\frac{1}{\Lambda}\int\frac{d(\Lambda\alpha)}{\sqrt{\Lambda^2\alpha^2-1}}=\frac{1}{\Lambda}\mathrm{Arch}(\Lambda a) \qquad a(t)=\frac{1}{\Lambda}\mathrm{ch}(\Lambda t) \qquad \mathrm{ch}(\Lambda t)=\frac{1}{2}\left(e^{\Lambda t}+e^{-\Lambda t}\right)\sim e^{\Lambda t}$$

Замкнутая изотропная модель

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^4} \frac{\varepsilon_0}{a^n}$$

При n>2 и малых a второй член в левой части оказывается много меньше члена в правой части, и в первом приближении им можно пренебречь.

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \approx \frac{8\pi G_N}{3c^4} \frac{\varepsilon_0}{a^n} \qquad \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0} \frac{1}{a^{\frac{n}{2}-1}}$$

$$t \sim \int a^{\frac{n}{2}-1} da \sim a^{\frac{n}{2}} \qquad a(t) \sim t^{\frac{2}{n}}$$

Для пылевидной материи (n=3): $a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$

Для излучения (n=4): $a(t) \sim \sqrt{t}$

Замкнутая изотропная модель

Калибровка ***конформного времени***: $N = a$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho} \quad \Rightarrow \quad g'_{00} = \frac{\partial x^{0}}{\partial x'^{0}} \frac{\partial x^{0}}{\partial x'^{0}} g_{00} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = \left(\frac{dt}{d\eta} \right)^2 N^2 \quad \Rightarrow \quad dt = a\, d\eta$$

Два метрических тензора называются ***конформно-эквивалентными***, если они связаны соотношением

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

$$ds^2 = a^2(t)\left[dt^2 - d\chi^2 + \sin^2\chi \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \right]$$

Замкнутая изотропная модель

$$\frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2}+\frac{3}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^4}+\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon$$

$$\dot{a}=\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon(a)a^4-a^2} \qquad \eta=\int\frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon(a)a^4-a^2}}$$

Решение для пылевидной материи (n=3): $\varepsilon(a)=\dfrac{\varepsilon_0}{a^3}$ $\qquad \dfrac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0=2a_0$

$$\eta=\int\frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 a-a^2}}=\int\frac{da}{\sqrt{2a_0a-a^2}}=-\int\frac{d(a_0-a)}{\sqrt{a_0^2-(a_0-a)^2}}=\arccos\frac{a_0-a}{a_0}$$

$$a(\eta)=a_0(1-\cos\eta) \qquad t=\int a(\eta)d\eta=a_0(\eta-\sin\eta)$$

Масштабный фактор возрастает от нуля при $\eta=0$ $(t=0)$ до максимального значения $a=2a_0$ при $\eta=\pi$, а затем снова убывает до нуля при $\eta=2\pi$.

Замкнутая изотропная модель

$$a(\eta) = a_0(1-\cos\eta) \approx a_0\left(1-1+\frac{\eta^2}{2}\right) = \frac{a_0}{2}\eta^2$$

$$\Rightarrow \quad a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$$

$$t = a_0(\eta - \sin\eta) \approx a_0\left(\eta - \eta + \frac{\eta^3}{3!}\right) = \frac{a_0}{6}\eta^3$$

Решение для излучения (n=4):

$$\varepsilon(a) = \frac{\varepsilon_0}{a^4} \qquad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 = a_1^2$$

$$\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 - a^2}} = \int \frac{da}{\sqrt{a_1^2 - a^2}} = \arcsin\frac{a}{a_1}$$

$$a(\eta) = a_1 \sin\eta \qquad t = \int a(\eta)\,d\eta = a_1(1-\cos\eta)$$

$$a(\eta) \approx a_1\eta \quad t = \frac{a_1}{2}\eta^2 \quad \Rightarrow \quad a(t) \sim \sqrt{t}$$

Открытая изотропная модель

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)\operatorname{sh}^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)\operatorname{sh}^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}=\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$\Gamma^0_{00}=\frac{\dot N}{N};\quad \Gamma^0_{11}=\frac{a\dot a}{N^2};\quad \Gamma^0_{22}=\frac{a\dot a\operatorname{sh}^2\chi}{N^2};\quad \Gamma^0_{33}=\frac{a\dot a\operatorname{sh}^2\chi\sin^2\theta}{N^2}$$

$$\Gamma^1_{01}=\Gamma^1_{10}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^1_{22}=-\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi;\quad \Gamma^1_{33}=-\operatorname{sh}\chi\operatorname{ch}\chi\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{02}=\Gamma^2_{20}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\operatorname{cth}\chi;\quad \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{03}=\Gamma^3_{30}=\frac{\dot a}{a};\quad \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\operatorname{cth}\chi;\quad \Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}=\operatorname{ctg}\theta$$

Открытая изотропная модель

Найдем смешанные компоненты тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}$$

$$R^0_0 = -3\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + 3\frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} \qquad R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} - \frac{2\dot{a}^2}{N^2 a^2} + \frac{2}{a^2}$$

Вычислим скалярную кривизну:

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{1}{a^2}\right]$$

Уравнения Эйнштейна:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T^0_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a)$$

$$R^1_1 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T^1_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{2\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\left[\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)\right]$$

Открытая изотропная модель

Калибровочное условие выберем в виде $N=1$

$$\frac{3\dot{a}^2}{N^2a^2}-\frac{3}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\frac{\varepsilon_0}{a^n}$$

n=0 (космологическая постоянная):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 \qquad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0=\pm\Lambda^2 \qquad \frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\pm\Lambda^2 \qquad \dot{a}^2=1\pm\Lambda^2a^2$$

$$t=\int\frac{da}{\sqrt{1\pm\Lambda^2a^2}}=\frac{1}{\Lambda}\int\frac{d(\Lambda a)}{\sqrt{1\pm\Lambda^2a^2}}=\frac{1}{\Lambda}\begin{cases}\mathrm{Arsh}(\Lambda a)\\ \arcsin(\Lambda a)\end{cases}$$

Положительной космологической постоянной соответствует решение

$$a(t)=\frac{1}{\Lambda}\mathrm{sh}(\Lambda t)$$

Отрицательной космологической постоянной соответствует решение ***анти-де Ситтера***

$$a(t)=\frac{1}{\Lambda}\sin(\Lambda t)$$

Открытая изотропная модель

Конформная калибровка $N = a$

$$\frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^4} - \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon(a)$$

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon(a) a^4 + a^2} \qquad \eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon(a) a^4 + a^2}}$$

Решение для пылевидной материи (n=3): $\varepsilon(a) = \dfrac{\varepsilon_0}{a^3}$ $\qquad \dfrac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 = 2a_0$

$$\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 a + a^2}} = \int \frac{da}{\sqrt{2a_0 a + a^2}} = \int \frac{d(a+a_0)}{\sqrt{(a+a_0)^2 - a_0^2}} = \mathrm{Arch}\,\frac{a+a_0}{a_0}$$

$$a(\eta) = a_0(\mathrm{ch}\,\eta - 1) \qquad t = a_0(\mathrm{sh}\,\eta - \eta)$$

Масштабный фактор возрастает от нуля при η=0 (t=0) до бесконечности.

Открытая изотропная модель

$$a(\eta) = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1) \approx a_0\left(1 + \frac{\eta^2}{2} - 1\right) = \frac{a_0}{2}\eta^2$$

$$t = a_0(\operatorname{sh}\eta - \eta) \approx a_0\left(\eta + \frac{\eta^3}{3!} - \eta\right) = \frac{a_0}{6}\eta^3$$

$$\Rightarrow \quad a(t) \sim t^{\frac{2}{3}}$$

Решение для излучения (n=4):

$$\varepsilon(a) = \frac{\varepsilon_0}{a^4} \qquad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 = a_1^2$$

$$\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 + a^2}} = \int \frac{da}{\sqrt{a_1^2 + a^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{a}{a_1}$$

$$a(\eta) = a_1 \operatorname{sh}\eta \qquad t = a_1(\operatorname{ch}\eta - 1)$$

$$a(\eta) \approx a_1\eta \qquad t = \frac{a_1}{2}\eta^2 \qquad \Rightarrow \qquad a(t) \sim \sqrt{t}$$

Открытая плоская модель

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t) \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{\dot{N}}{N}; \quad \Gamma^{0}_{11} = \Gamma^{0}_{22} = \Gamma^{0}_{33} = \frac{a\dot{a}}{N^2}$$

$$\Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{2}_{02} = \Gamma^{2}_{20} = \Gamma^{3}_{03} = \Gamma^{3}_{30} = \frac{\dot{a}}{a}$$

Открытая плоская модель

Найдем смешанные компоненты тензора Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}$$

$$R^0_0 = -3\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + 3\frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} \qquad R^1_1 = R^2_2 = R^3_3 = -\frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} - \frac{2\dot{a}^2}{N^2 a^2}$$

Вычислим скалярную кривизну:

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2}\right]$$

Уравнения Эйнштейна:

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T^0_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a)$$

$$R^1_1 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T^1_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{2\dot{N}\dot{a}}{N^3 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\left[\varepsilon(a) + \frac{1}{3}a\varepsilon'(a)\right]$$

Открытая плоская модель

Калибровочное условие выберем в виде $N = 1$

$$\frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} = \frac{8\pi G_N}{c^4}\varepsilon(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^4}\frac{\varepsilon_0}{a^n}$$

n=0 (космологическая постоянная):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 \qquad \frac{8\pi G_N}{3c^4}\varepsilon_0 = \Lambda^2 \qquad \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda^2 \qquad \frac{\dot{a}}{a} = \pm\Lambda$$

$$a(t) = a_0 e^{\pm\Lambda t}$$

Постоянная Хаббла: $H = \dfrac{\dot{a}}{a}$

Изотропные космологические модели

Выражения для пространственно-временных интервалов можно записать в виде одной формулы:

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

- k=1 соответствует закрытой модели;
- k= –1 соответствует открытой модели;
- k=0 соответствует плоской модели.

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$r = \sin\chi \qquad g'_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right)^2 g_{11} = -\cos^2\chi \frac{a^2(t)}{1-\sin^2\chi} = -a^2(t)$$

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$$r = \mathrm{sh}\,\chi \qquad g'_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right)^2 g_{11} = -\mathrm{ch}^2\chi \frac{a^2(t)}{1+\mathrm{sh}^2\chi} = -a^2(t)$$

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\left(d\theta^2 + \mathrm{sh}^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Изотропные космологические модели

Можно определить размер наблюдаемой части Вселенной в данный момент времени *t*. Этот размер определяется расстоянием, которое свет может пройти за время *t*.

$$dl^2 = a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$$R(t) = a(t)\int_0^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

$$N^2(t)dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} = 0$$

$$dr = \sqrt{1-kr^2}\,\frac{N(t)}{a(t)}dt \qquad N = 1 \qquad \Rightarrow \qquad R(t) = a(t)\int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

Это расстояние называют ***радиусом горизонта частиц***, или, сокращенно, ***горизонтом частиц***. Горизонт частиц ограничивает причинно связанную область Вселенной, которую наблюдатель в принципе может видеть в данный момент времени.

Изотропные космологические модели

В моделях Фридмана $a(t) \sim t^{\frac{2}{n}}$ $R(t) = t^{\frac{2}{n}} \int_0^t t^{-\frac{2}{n}} dt = \dfrac{n}{n-2} t$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{nt} \qquad t = \frac{2}{nH(t)} \qquad R(t) = \frac{2}{n-2}\frac{1}{H(t)}$$

Можно ввести также понятие ***горизонта событий***, который ограничивает область Вселенной, из которой когда-либо, до некоторого времени $t_{\max}$ включительно, может прийти информация о событиях, происходящих в данный момент времени t:

$$R_h(t) = a(t) \int_t^{t_{\max}} \frac{dt'}{a(t')}$$

Под временем $t_{\max}$ понимают либо время, когда замкнутая вселенная коллапсирует, либо бесконечное время. В открытых моделях Фридмана горизонт событий отсутствует.

В плоской вселенной де Ситтера $a(t) \sim e^{\Lambda t}$ $H(t) = \dfrac{\dot{a}}{a} = \Lambda = \text{const}$

В мире де Ситтера существует горизонт событий. Наблюдатель в экспоненциально расширяющейся Вселенной видит лишь те события, которые происходят на расстоянии не более чем $1/\Lambda$ от него.

Модель де Ситтера

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad N = 1 \qquad a(t) = a_0 e^{\Lambda t}$$

$$ds^2 = (dt')^2 - a_0^2 e^{2\Lambda t'}\left[(dr')^2 + (r')^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

$$r' = \frac{r}{a_0\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}}e^{-\Lambda t} \qquad t' = t + \frac{1}{\Lambda}\ln\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}$$

$$-a_0^2 e^{2\Lambda t'}(r')^2 = -a_0^2 e^{2\Lambda t}\left(1-\Lambda^2 r^2\right)\frac{r^2}{a_0^2\left(1-\Lambda^2 r^2\right)}e^{-2\Lambda t} = -r^2$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}g_{\lambda\rho} \qquad \Rightarrow \qquad g_{00} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 g'_{00} + \left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right)^2 g'_{11}$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right)^2 g'_{00} + \left(\frac{\partial r'}{\partial r}\right)^2 g'_{11}$$

Модель де Ситтера

$$r' = \frac{r}{a_0\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}} e^{-\Lambda t} \qquad t' = t + \frac{1}{\Lambda}\ln\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \qquad \frac{\partial r'}{\partial t} = -\frac{\Lambda r}{a_0\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}} e^{-\Lambda t}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial r} = \frac{1}{\Lambda}\frac{1}{\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}}\left(-2\Lambda^2 r\right) = -\frac{\Lambda r}{1-\Lambda^2 r^2}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial r} = \left[\frac{1}{a_0\sqrt{1-\Lambda^2 r^2}} + \frac{r}{2a_0\left(1-\Lambda^2 r^2\right)^{\frac{3}{2}}} 2\Lambda^2 r\right] e^{-\Lambda t} = \frac{e^{-\Lambda t}}{a_0\left(1-\Lambda^2 r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$g_{00} = \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)^2 g'_{00} + \left(\frac{\partial r'}{\partial t}\right)^2 g'_{11} = 1 - \frac{\Lambda^2 r^2}{a_0^2\left(1-\Lambda^2 r^2\right)} e^{-2\Lambda t} a_0^2 e^{2\Lambda t}\left(1-\Lambda^2 r^2\right) = 1-\Lambda^2 r^2$$

$$g_{11} = \left(\frac{\partial t'}{\partial r}\right)^2 g'_{00} + \left(\frac{\partial r'}{\partial r}\right)^2 g'_{11} = \frac{\Lambda^2 r^2}{\left(1-\Lambda^2 r^2\right)^2} - \frac{e^{-2\Lambda t}}{a_0^2\left(1-\Lambda^2 r^2\right)^3} a_0^2 e^{2\Lambda t}\left(1-\Lambda^2 r^2\right) =$$

$$= \frac{\Lambda^2 r^2 - 1}{\left(1-\Lambda^2 r^2\right)^2} = -\frac{1}{1-\Lambda^2 r^2}$$

Модель де Ситтера

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad \Rightarrow$$

$$ds^2 = \left(1 - \Lambda^2 r^2\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \Lambda^2 r^2} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Это выражение имеет особенность ***на горизонте событий***: $r = \dfrac{1}{\Lambda}$

Данная ситуация похожа на ситуацию с черной дырой, описываемой метрикой Шварцшильда, которая также имеет особенность на горизонте событий.

Наблюдатель не может получать информацию из области пространства-времени, которая отделена от него горизонтом событий.

В случае метрики Шварцшильда черная дыра окружена горизонтом событий, который представляет собой сферическую поверхность, а наблюдатель находится вне его.

В мире де Ситтера наблюдатель окружен горизонтом событий, находящимся на расстоянии $1/\Lambda$ от наблюдателя.

Метрики Шварцшильда и де Ситтера являются стационарными (не зависящими от времени).

Решение Шварцшильда

Центральная симметрия подразумевает, что гравитационное поле и, следовательно, выражение для метрического тензора, должно быть одинаково во всех точках, находящимся на одинаковом расстоянии от центра.

$$ds^2 = \left[N^2(t,r) - N_r^2(t,r) V^2(t,r) \right] dt^2 - 2N_r(t,r) V^2(t,r) dt dr -$$

$$- V^2(t,r) dr^2 - W^2(t,r) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

В искривленном пространстве-времени длина окружности уже не будет равна радиусу окружности, умноженному на 2π. Однако радиальная координата r может быть выбрана так, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$.

С помощью преобразования координат можно добиться того, чтобы функция $N_t(t,r)$ обращалась в нуль.

$$ds^2 = N^2(t,r) dt^2 - V^2(t,r) dr^2 - W^2(t,r) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right)$$

Решение Шварцшильда

$$ds^2 = N^2(t,r)dt^2 - V^2(t,r)dr^2 - W^2(t,r)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{N}}{N}; \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{N'}{N}; \quad \Gamma^0_{11} = \frac{V\dot{V}}{N^2} \quad \Gamma^0_{22} = \frac{W\dot{W}}{N^2}; \quad \Gamma^0_{33} = \frac{W\dot{W}}{N^2}\sin^2\theta$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{NN'}{V^2}; \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{V}}{V}; \quad \Gamma^1_{11} = \frac{V'}{V}; \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{WW'}{V^2}; \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{WW'}{V^2}\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \frac{\dot{W}}{W}; \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{W'}{W}; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{\dot{W}}{W}; \quad \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{W'}{W}; \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \mathrm{ctg}\,\theta$$

Решение Шварцшильда

$$R_0^0 = -\frac{1}{N^2}\left(\frac{\ddot{V}}{V} + \frac{2\ddot{W}}{W} - \frac{\dot{N}\dot{V}}{NV} - \frac{2\dot{N}\dot{W}}{NW}\right) - \frac{1}{V^2}\left(\frac{N'V'}{NV} - \frac{N''}{N} - \frac{2N'W'}{NW}\right)$$

$$R_0^1 = -\frac{2}{V^2}\left(\frac{\dot{V}W'}{VW} + \frac{N'\dot{W}}{NW} - \frac{\dot{W}'}{W}\right)$$

$$R_1^1 = -\frac{1}{N^2}\left(\frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{N}\dot{V}}{NV} + \frac{2\dot{V}\dot{W}}{VW}\right) + \frac{1}{V^2}\left(\frac{N''}{N} + \frac{2W''}{W} - \frac{N'V'}{NV} - \frac{2V'W'}{VW}\right)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{N^2}\left[\frac{\ddot{W}}{W} - \frac{\dot{N}\dot{W}}{NW} + \frac{\dot{V}\dot{W}}{VW} + \left(\frac{\dot{W}}{W}\right)^2\right] + \frac{1}{V^2}\left[\frac{W''}{W} - \frac{V'W'}{VW} + \frac{N'W'}{NW} + \left(\frac{W'}{W}\right)^2\right] - \frac{1}{W^2}.$$

$$R = -\frac{2}{N^2}\left[\frac{\ddot{V}}{V} + \frac{2\ddot{W}}{W} - \frac{\dot{N}\dot{V}}{NV} - \frac{2\dot{N}\dot{W}}{NW} + \frac{2\dot{V}\dot{W}}{VW} + \left(\frac{\dot{W}}{W}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{2}{V^2}\left[\frac{N''}{N} + \frac{2W''}{W} - \frac{N'V'}{NV} + \frac{2N'W'}{NW} - \frac{2V'W'}{VW} + \left(\frac{W'}{W}\right)^2\right] - \frac{2}{W^2}$$

Решение Шварцшильда

$$\frac{1}{N^2}\left[\left(\frac{\dot W}{W}\right)^2+\frac{2\dot V\dot W}{VW}\right]-\frac{1}{V^2}\left[\frac{2W''}{W}-\frac{2V'W'}{VW}+\left(\frac{W'}{W}\right)^2\right]+\frac{1}{W^2}=\kappa T_0^0$$

$$-\frac{2}{V^2}\left(\frac{\dot V W'}{VW}+\frac{N'\dot W}{NW}-\frac{\dot W'}{W}\right)=\kappa T_0^1$$

$$\frac{1}{N^2}\left[\frac{2\ddot W}{W}-\frac{2\dot N\dot W}{NW}+\left(\frac{\dot W}{W}\right)^2\right]-\frac{1}{V^2}\left[\frac{2N'W'}{NW}+\left(\frac{W'}{W}\right)^2\right]+\frac{1}{W^2}=\kappa T_1^1$$

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{\ddot V}{V}+\frac{\ddot W}{W}-\frac{\dot N\dot W}{NW}-\frac{\dot N\dot V}{NV}+\frac{\dot V\dot W}{VW}\right)-$$

$$-\frac{1}{V^2}\left(\frac{N''}{N}+\frac{W''}{W}+\frac{N'W'}{NW}-\frac{N'V'}{NV}-\frac{V'W'}{VW}\right)=\kappa T_2^2$$

Решение Шварцшильда

Выберем радиальную координату r так, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$.

$$\Rightarrow \qquad W(t,r) = r \qquad dl^2 = V^2(t,r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int dl = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r \qquad N = \frac{1}{V}$$

$$\frac{1}{N^2}\left[\left(\frac{\dot W}{W}\right)^2 + \frac{2\dot V\dot W}{VW}\right] - \frac{1}{V^2}\left[\frac{2W''}{W} - \frac{2V'W'}{VW} + \left(\frac{W'}{W}\right)^2\right] + \frac{1}{W^2} = \kappa T_0^0$$

$$\Rightarrow \qquad -\frac{1}{V^2}\left(-\frac{2V'}{Vr} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0 \qquad 2V'r - V + V^3 = 0$$

$$-\frac{2}{V^2}\left(\frac{\dot V W'}{VW} + \frac{N'\dot W}{NW} - \frac{\dot W'}{W}\right) = \kappa T_0^1 \quad \Rightarrow \quad \dot V = 0$$

$$\frac{1}{N^2}\left[\frac{2\ddot W}{W} - \frac{2\dot N\dot W}{NW} + \left(\frac{\dot W}{W}\right)^2\right] - \frac{1}{V^2}\left[\frac{2N'W'}{NW} + \left(\frac{W'}{W}\right)^2\right] + \frac{1}{W^2} = \kappa T_1^1$$

$$\Rightarrow \qquad 2V'r - V + V^3 = 0$$

Решение Шварцшильда

$$\frac{1}{N^2}\left(\frac{\ddot V}{V}+\frac{\ddot W}{W}-\frac{\dot N\dot W}{NW}-\frac{\dot N\dot V}{NV}+\frac{\dot V\dot W}{VW}\right)-\frac{1}{V^2}\left(\frac{N''}{N}+\frac{W''}{W}+\frac{N'W'}{NW}-\frac{N'V'}{NV}-\frac{V'W'}{VW}\right)=\kappa T_2^2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{V''}{V}+\frac{2(V')^2}{V^2}-\frac{V'}{Vr}+\frac{(V')^2}{V^2}-\frac{V'}{Vr}=0 \qquad VV''r-3(V')^2r+2VV'=0$$

$$2V'r-V+V^3=0 \quad \Rightarrow \quad 2V''r+V'+3V^2V'=0 \qquad 2VV''r+VV'+3V^3V'=0$$

$$-6(V')^2r+3VV'-3V^3V'=0$$

$$2VV''r-6(V')^2r+4VV'=0$$

$$\Downarrow$$

$$Y=\frac{1}{V^2} \qquad \frac{dV}{dr}=\frac{dV}{dY}\frac{dY}{dr}=-\frac{1}{2Y\sqrt{Y}}\frac{dY}{dr}$$

$$-\frac{Y'r}{Y\sqrt{Y}}-\frac{1}{\sqrt{Y}}+\frac{1}{Y\sqrt{Y}}=0 \qquad \int\frac{dY}{Y-1}=-\int\frac{dr}{r}$$

$$Y'r+Y-1=0 \qquad \ln(Y-1)=\ln C-\ln r$$

$$Y=N^2=\frac{1}{V^2}=1+\frac{C}{r}=1-\frac{r_g}{r}$$

Решение Шварцшильда

$$Y = N^2 = \frac{1}{V^2} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

При $r \to \infty$ $g_{00} \to 1$ и $g_{11} \to 1$.

На бесконечности метрика совпадает с метрикой плоского пространства-времени. Такое пространство-время называют ***асимптотически-плоским***.

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \qquad \varphi = -\frac{G_N m}{r} \qquad \Rightarrow \qquad g_{00} = 1 - \frac{2G_N m}{c^2 r} \qquad r_g = \frac{2G_N m}{c^2}$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Это выражение имеет особенность при $r = r_g$. Величина r_g, имеющая размерность длины, называется ***гравитационным*** или ***шварцшильдовским радиусом***. Точки, расположенные в пространстве на расстоянии $r = r_g$ от центра поля, находятся на ***шварцшильдовской сфере***, которая представляет собой ***горизонт событий*** черной дыры.

Решение Шварцшильда

Можно убедиться в том, что решение Шварцшильда описывает искривленное пространство-время. Для этого рассмотрим две точки в пространстве, лежащими на одном и том же радиусе (при фиксированных угловых координатах).

$$r_1 > r_g \qquad \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} > \int_{r_2}^{r_1} dr = r_1 - r_2$$

$$r_2 > r_g$$

Определим, сколько времени понадобится свету для того, чтобы пройти расстояние между точками r_1 и r_2.

$$ds = 0 \qquad d\theta = 0 \qquad d\varphi = 0$$

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad dt = \frac{dr}{1-\frac{r_g}{r}}$$

Решение Шварцшильда

$$dt = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{rdr}{r - r_g} = \int_{r_2}^{r_1} dr + r_g \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r - r_g} = r_1 - r_2 + r_g \ln \frac{r_1 - r_g}{r_2 - r_g}$$

Эта величина расходится при $r_2 \to r_g$. Это означает, что свету необходимо бесконечное время, чтобы достигнуть радиуса Шварцшильда. С точки зрения удаленного наблюдателя все, что падает в черную дыру, "зависает" над горизонтом событий.

Однако особенность на горизонте событий $r = r_g$ является устранимой: от нее можно избавится, перейдя к другой системе координат. Это говорит о том, что такая особенность является фиктивной, нефизической.

Решение Шварцшильда

"Черепашья" координата ("tortoise coordinate"):

$$r' = r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

$$r_g < r < +\infty$$

$$-\infty < r' < +\infty$$

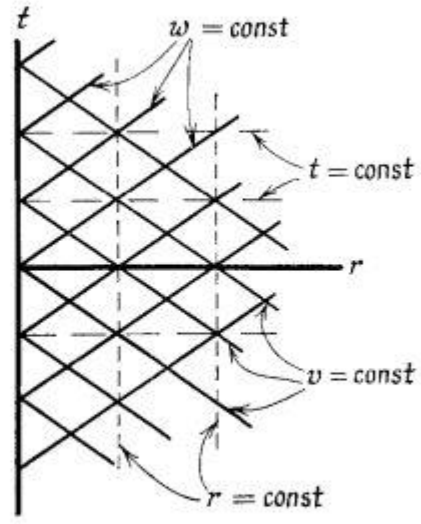
$$g'_{11} = \left(\frac{\partial r}{\partial r'}\right)^2 g_{11} = \frac{1}{\left(\dfrac{\partial r'}{\partial r}\right)^2} g_{11} = -\frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{\dfrac{r}{r_g} - 1}\right)^2} \frac{1}{1 - \dfrac{r_g}{r}} = -\frac{1}{\left(1 + \dfrac{r_g}{r - r_g}\right)^2} \frac{r}{r - r_g} = -\frac{r - r_g}{r} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(dt^2 - \left(dr'\right)^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Световые координаты

Световые (изотропные) координаты:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$



$$v = t + r \qquad t = \frac{1}{2}(v + w)$$

$$w = t - r \qquad r = \frac{1}{2}(v - w)$$

$$-\infty < v < \infty$$

$$-\infty < w < \infty$$

$$dt^2 - dr^2 = dvdw$$

В плоском пространстве-времени линии $v =$ const и $w =$ const соответствуют линиям распространения световых лучей.

Пять типов бесконечностей

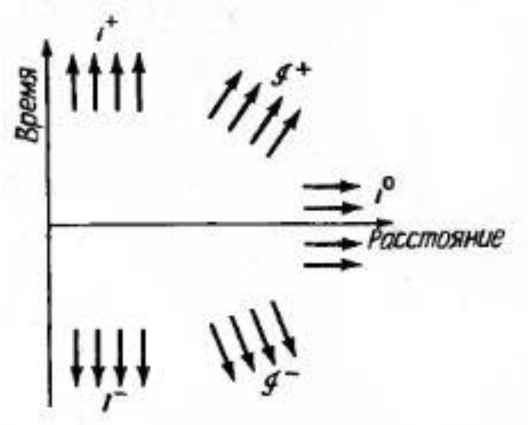
Область, из которой приходят все материальные тела, называется ***временноподобной бесконечностью прошлого*** и обозначается I^-.

Область, куда все материальные тела уходят, называется ***временноподобной бесконечностью будущего*** I^+.

Область, из которой приходят световые лучи, называется ***световой бесконечностью прошлого*** $\mathcal{J}^-$.

Область, куда уходят световые лучи, – это ***световая бесконечность будущего*** $\mathcal{J}^+$.

Наконец, имеется ***пространственноподобная бесконечность*** I^0, чтобы попасть в эту область, частицы должны иметь сверхсветовую скорость.



Конформные диаграммы

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$dt^2 - dr^2 = dvdw$$

$$v = \operatorname{tg} p$$

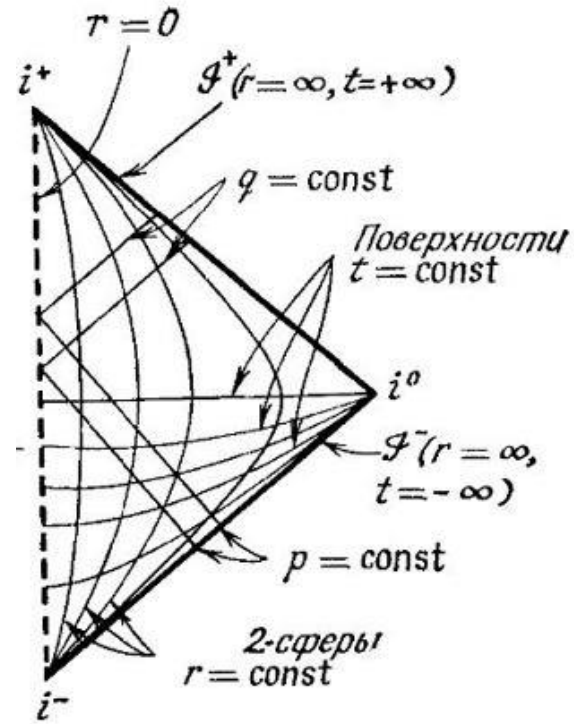
$$w = \operatorname{tg} q$$

$$-\frac{\pi}{2} < p < \frac{\pi}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} < q < \frac{\pi}{2}$$

$$dvdw = \frac{1}{\cos^2 p \cos^2 q} dpdq = \sec^2 p \sec^2 q dpdq$$

$$r = \frac{1}{2}(v - w) = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q) = \frac{1}{2}\frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q} = \frac{1}{2}\sec p \sec q \sin(p-q)$$

$$ds^2 = \sec^2 p \sec^2 q\left[dpdq - \frac{1}{4}\sin^2(p-q)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$



Конформные диаграммы

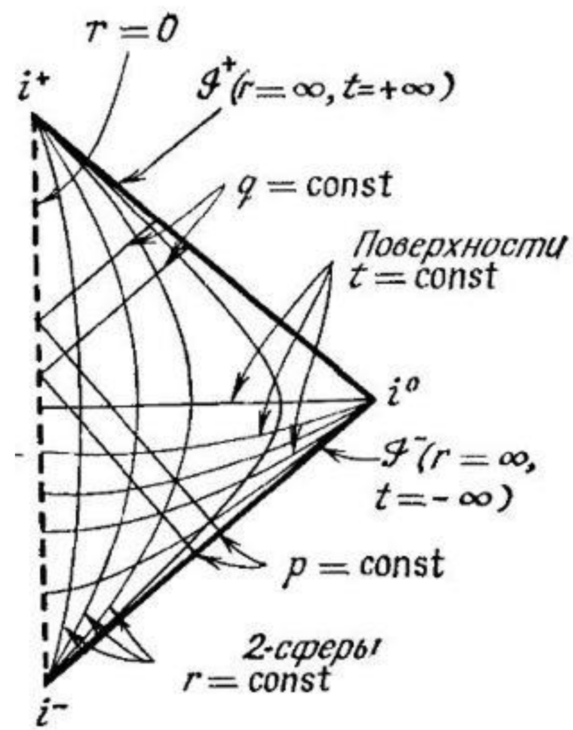
$$ds^2 = \sec^2 p \sec^2 q \left[dp\,dq - \frac{1}{4}\sin^2(p-q)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \right]$$

$$T = p + q \qquad p = \frac{1}{2}(T+R)$$

$$R = p - q \qquad q = \frac{1}{2}(T-R)$$

$$ds^2 = \frac{1}{4}\sec^2\left[\frac{1}{2}(T+R)\right]\sec^2\left[\frac{1}{2}(T-R)\right]\times$$

$$\times\left[dT^2 - dR^2 - \sin^2 R\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right]$$



Решение Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(dt^2 - \left(dr'\right)^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$v = t + r' \qquad w = t - r' \qquad t = \frac{1}{2}\left(v + w\right) \qquad r' = \frac{1}{2}\left(v - w\right)$$

$$-\infty < v < \infty$$
$$-\infty < w < \infty$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dvdw - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$v' = \exp\left(\frac{v}{2r_g}\right) \qquad w' = -\exp\left(-\frac{w}{2r_g}\right) \qquad v = 2r_g \ln v' \qquad w = -2r_g \ln\left(-w'\right)$$

$$0 < v' < \infty \qquad -\infty < w' < 0$$

$$dvdw = -4r_g^2 \frac{1}{v'w'} dv'dw' = 4r_g^2 \exp\left(-\frac{v - w}{2r_g}\right) dv'dw' = 4r_g^2 \exp\left(-\frac{r'}{r_g}\right) dv'dw' =$$

$$= 4r_g^2 \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) \frac{1}{\dfrac{r}{r_g} - 1} dv'dw' = \frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) \frac{1}{1 - \dfrac{r_g}{r}} dv'dw'$$

Решение Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dvdw - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dvdw = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} dv'dw'$$

$$T = \frac{1}{2}(v' + w') \qquad R = \frac{1}{2}(v' - w') \qquad v' = T + R \qquad w' = T - R$$

$$-\infty < T < \infty \qquad 0 < R < \infty$$

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} e^{-\frac{r}{r_g}} \left(dT^2 - dR^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Это выражение (***метрика Крускала – Секереша***) имеет ***физическую*** особенность в начале координат $r = 0$, где находится центр поля.

Решение Шварцшильда

Положение ***горизонта*** $r = r_g$.

$$r' = r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \qquad r = r_g \;\Rightarrow\; r' = -\infty$$

$$r' = \frac{1}{2}(v - w) \;\Rightarrow\; w \to +\infty \qquad w' = -\exp\left(-\frac{w}{2r_g}\right) \;\Rightarrow\; w' \to 0$$

$$v = \mathrm{const}$$

$$t = \frac{1}{2}(v + w) \;\Rightarrow\; t \to +\infty$$

По часам удаленного наблюдателя, любому материальному телу или даже свету необходимо бесконечное время для того, чтобы пересечь горизонт событий. Можно считать, что падающее в черную дыру тело пересекает горизонт событий при $t = +\infty$, после чего достигает сингулярности.

Решение Шварцшильда

Положение ***горизонта*** $r = r_g$.

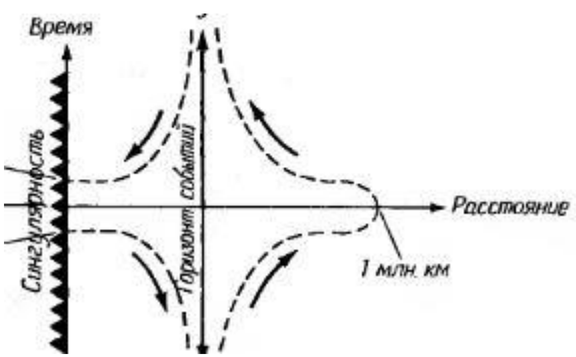
$$r' = \frac{1}{2}(v - w) \qquad \Rightarrow \qquad v \to -\infty$$

$$w = \text{const}$$

$$v' = \exp\left(\frac{v}{2r_g}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v' \to 0$$

$$t = \frac{1}{2}(v + w) \qquad \Rightarrow \qquad t \to -\infty$$

Если рассмотреть историю падающего в черную дыру тела в обращенном времени, возникает гипотетическая картина: тело вылетает из сингулярности и приближается изнутри к горизонту событий; оно пересекает горизонт событий при $t = -\infty$, после чего удаляется от него на некоторое расстояние. Обращенную во времени черную дыру называют ***белой дырой***.



Горизонт событий в координатах v', w', представляется парой (световых) прямых $w' = 0$, $v' = 0$, что соответствует пересечению горизонта при $t = \pm\infty$.

Решение Шварцшильда

Положение ***сингулярности*** $r = 0$.

$$v' = \exp\left(\frac{v}{2r_g}\right) \qquad w' = -\exp\left(-\frac{w}{2r_g}\right) \qquad r' = r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

$$v'w' = -\exp\left(\frac{v-w}{2r_g}\right) = -e^{\frac{r'}{r_g}} = -e^{\frac{r}{r_g}}\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad v'w' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T^2 - R^2 = 1$$

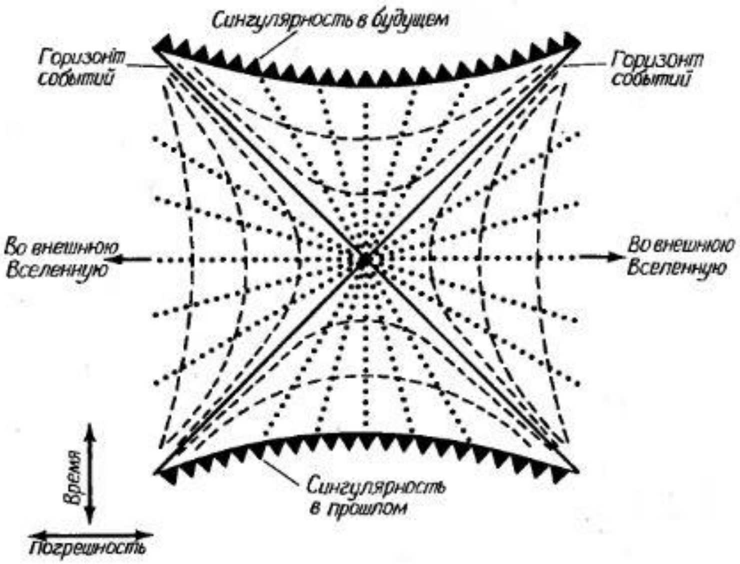
Сингулярность в координатах T, R представлена двумя ветвями гиперболы:

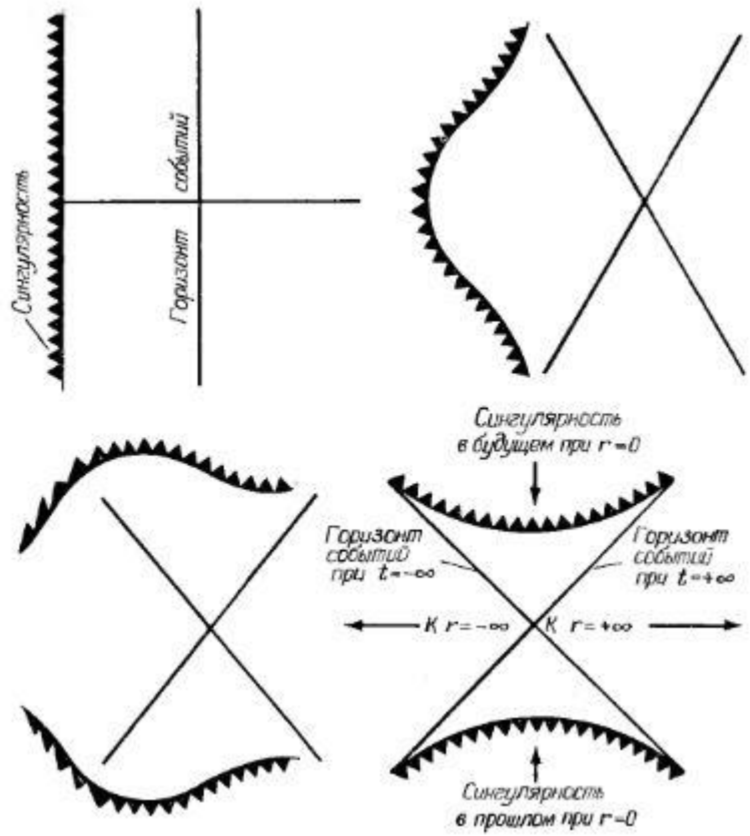
$T = -\sqrt{1+R^2}$ (***сингулярность прошлого***)

$T = \sqrt{1+R^2}$ (***сингулярность будущего***)

Решение Шварцшильда

Диаграмма Крускала – Секереша



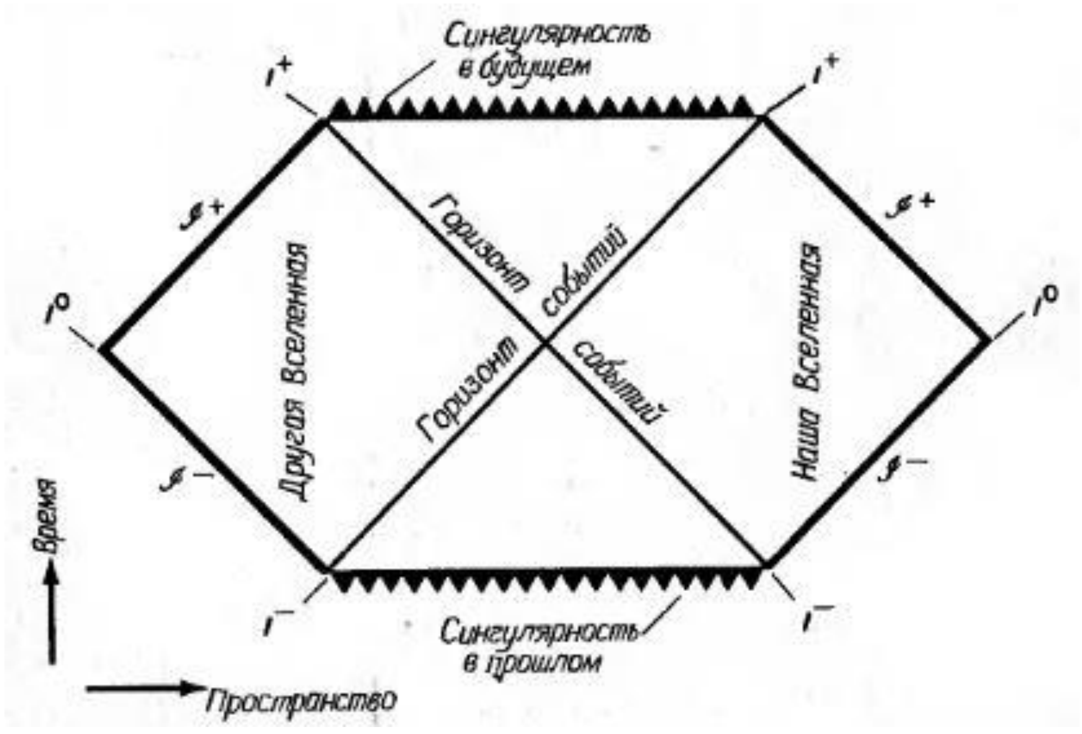


Решение Шварцшильда

Диаграмма Картера – Пенроуза для метрики Шварцшильда

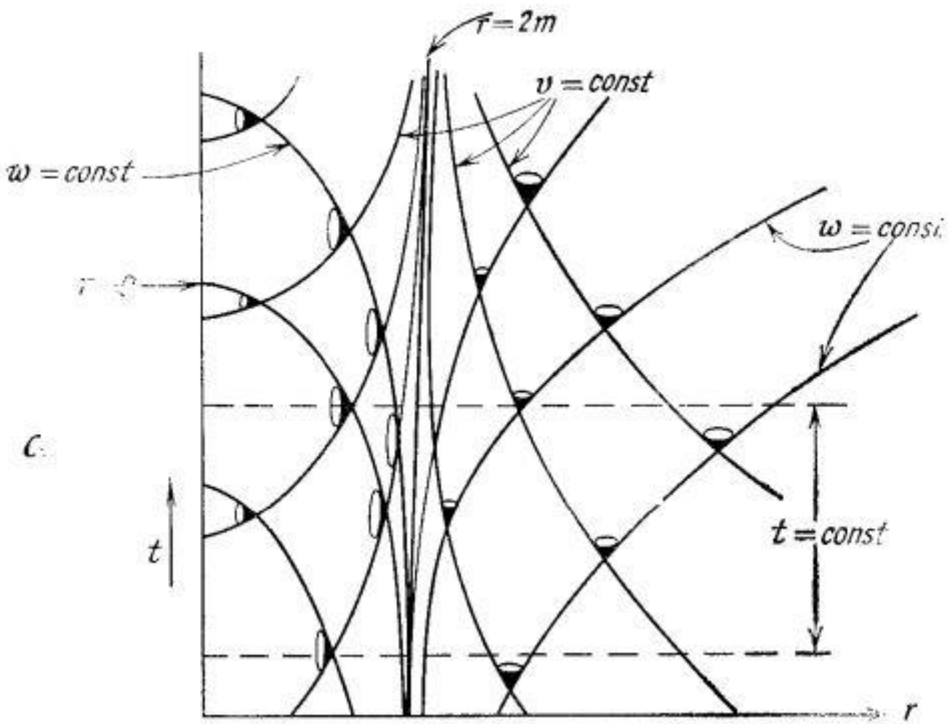
$$v' = \mathrm{tg}\, p$$

$$w' = \mathrm{tg}\, q$$



Решение Шварцшильда

Горизонт событий черной дыры Шварцшильда является ***световой поверхностью***.



$$t = v - r' = \mathrm{const} - r - r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|$$

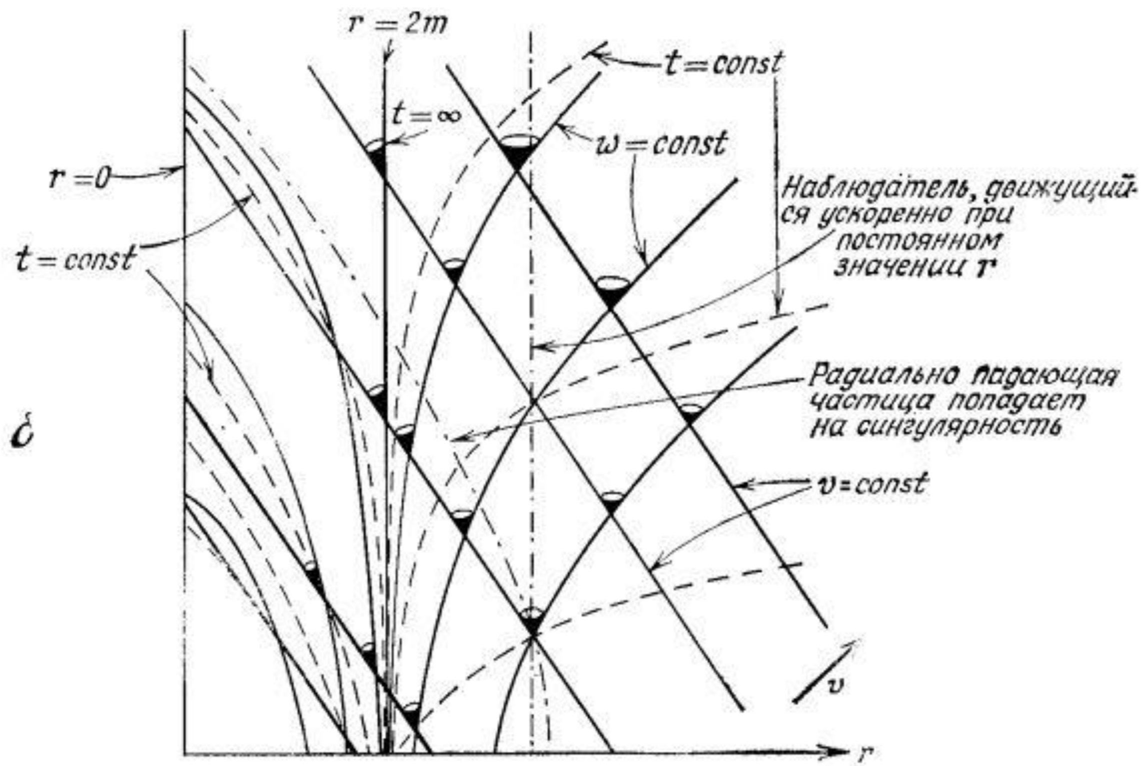
$$t = w + r' = \mathrm{const} + r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|$$

При $r \to r_g$ линии v=const асимптотически приближаются к вертикальной прямой $r = r_g$ в области $t \to +\infty$; линии w=const асимптотически приближаются к прямой $r = r_g$ в области $t \to -\infty$.

При $r \to 0$ $\quad r_g \ln\left(1 - \frac{r}{r_g}\right) \approx -r \quad$ t≈const.

Решение Шварцшильда

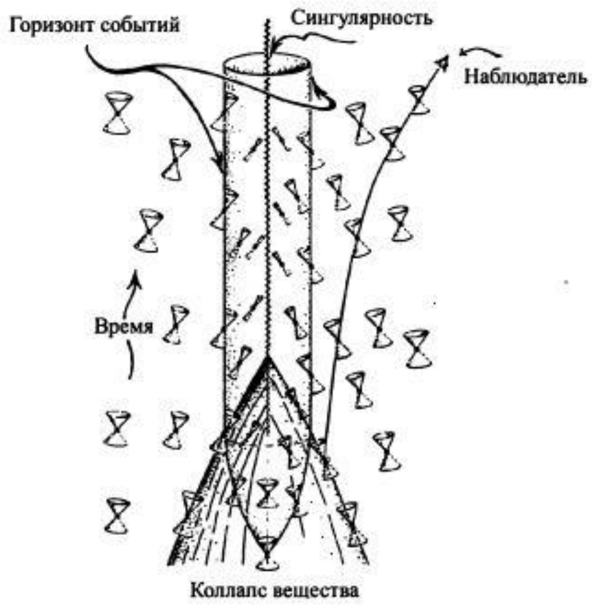
Диаграмма Финкельштейна



При приближении к горизонту событий световые конусы имеют все больший наклон к центру черной дыры, а при $r \leq r_g$ полностью лежат во внутренней области черной дыры. Мировая линия любой частицы должна лежать внутри светового конуса. Поэтому при $r < r_g$ все частицы должны двигаться к сингулярности $r = 0$.

Решение Шварцшильда

Коллапс сферически-симметричной звезды



В области $r > r_g$ мировые линии частиц временноподобны, а в области $r < r_g$ пространственноподобны. Если в пространстве-времени со сферической симметрией в окрестности рассматриваемой точки мировая линия, определяемая соотношениями r=const, θ=const, φ=const, времнноподобна, то говорят, что эта точка принадлежит ***R-области***. Если же эта линия пространственноподобна, то рассматриваемая точка принадлежит ***T-области***. Таким образом, область вне сферы Шварцшильда является R-областью, а область внутри сферы Шварцшильда является T-областью.

Решение Шварцшильда

Система отсчета Шварцшильда, которая определят шварцшильдовскую метрику, имеет место только в R-области. Ее можно представлять как решетку из невесомых жестких стержней, она статична и не деформируется. Внутри сферы Шварцшильда все тела падают к центру, что означает невозможность введения статической и недеформируемой системы отсчета в этой области.

В том, что точка r=0 является истинной особенностью, можно убедиться, вычисляя свертку тензора кривизны $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$, которая в этой точке стремится к бесконечности.

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds}=0$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\Gamma^0_{00}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+2\Gamma^0_{01}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}+\Gamma^0_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\Gamma^0_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\Gamma^0_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2r}{ds^2}+\Gamma^1_{00}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+2\Gamma^1_{01}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\Gamma^1_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+2\Gamma^2_{02}\frac{dt}{ds}\frac{d\theta}{ds}+2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}+\Gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2\Gamma^3_{03}\frac{dt}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+2\Gamma^2_{02}\frac{dt}{ds}\frac{d\theta}{ds}+2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}+\Gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0 \qquad \theta=\frac{\pi}{2} \qquad \frac{d\theta}{ds}=0$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2\Gamma^3_{03}\frac{dt}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$r^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2r\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d}{ds}\left(r^2\frac{d\varphi}{ds}\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad r^2\frac{d\varphi}{ds}=J=\text{const}$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\Gamma^0_{00}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+2\Gamma^0_{01}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}+\Gamma^0_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\Gamma^0_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\Gamma^0_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{2N'}{N}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}=0\qquad N=\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\qquad N'=\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}\frac{r_g}{r^2}\qquad \frac{2N'}{N}=\frac{r_g}{r^2}$$

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{d^2t}{ds^2}+\frac{r_g}{r^2}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds}=\frac{d}{ds}\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{dt}{ds}\right]=0\quad\Rightarrow\quad\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\frac{dt}{ds}=E=\mathrm{const}$$

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2-\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\qquad\Rightarrow$$

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left[\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]=1$$

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}E^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{J^2}{r^2}=1$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}E^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-\frac{J^2}{r^2}=1$$

$$\frac{dr}{ds}=\frac{d\varphi}{ds}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{J}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\qquad\Rightarrow\qquad E^2-\frac{J^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-\frac{J^2}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)$$

$$r=\frac{1}{u}\qquad\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\qquad\Rightarrow\qquad E^2-J^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-J^2\left(1-r_gu\right)u^2=1-r_gu$$

$$E^2-J^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-J^2u^2+J^2r_gu^3=1-r_gu$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=\frac{E^2-1}{J^2}+\frac{r_g}{J^2}u+r_gu^3$$

$$2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}+2u\frac{du}{d\varphi}=\frac{r_g}{J^2}\frac{du}{d\varphi}+3r_gu^2\frac{du}{d\varphi}\qquad\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3}{2}r_gu^2$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле

Нулевое приближение:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3}{2}r_g u^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}$$

Общее решение однородного уравнения: $u_0=C\cos\left(\varphi+\varphi_0\right)$

Частное решение неоднородного уравнения: $u_1=\dfrac{r_g}{2J^2}$

$$\varphi_0=0 \qquad C=\frac{er_g}{2J^2}$$

$$u=\frac{r_g}{2J^2}\left(1+e\cos\varphi\right) \qquad \Rightarrow \qquad r=\frac{2J^2}{r_g\left(1+e\cos\varphi\right)}$$

Это уравнение эллипса с эксцентриситетом e и фокальным параметром $p=\dfrac{2J^2}{r_g}$.

Движение частиц в центрально-симметричном поле

Первое приближение:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3}{2}r_g u^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3r_g^3}{8J^4}\left(1+e\cos\varphi\right)^2$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3r_g^3}{8J^4}\left[1+2e\cos\varphi+\frac{e^2}{2}\left(1+\cos2\varphi\right)\right]$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3r_g^3}{8J^4}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+\frac{3r_g^3e}{4J^4}\cos\varphi+\frac{3r_g^3e^2}{16J^4}\cos2\varphi$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3r_g^3}{8J^4}\left(1+\frac{e^2}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad u_{11}=\frac{r_g}{2J^2}+\frac{3r_g^3}{8J^4}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g^3e}{4J^4}\cos\varphi$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g^3e^2}{16J^4}\cos2\varphi$$

Второе слагаемое незначительно уменьшает фокальный параметр и приводит к несколько большему сжатию эллипса.

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\omega^2u=A\cos\Omega\varphi \quad\Rightarrow\quad u=\frac{A}{\omega^2-\Omega^2}\cos\Omega\varphi$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g^3e^2}{16J^4}\cos2\varphi \quad\Rightarrow\quad u_{13}=-\frac{r_g^3e^2}{16J^4}\cos2\varphi$$

Это решение соответствует наложению на эллипс биений с удвоенной частотой и не приводит к повороту эллипса.

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g^3e}{4J^4}\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad u_{12}=\frac{3r_g^3e}{8J^4}\varphi\sin\varphi$$

Это уравнение соответствует резонансному случаю, когда частота вынуждающей силы равна частоте колебаний.

Решение возрастает с ростом φ, и мы не можем пренебречь этим решением, именно оно дает искомую поправку.

$$u=\frac{r_g}{2J^2}\left(1+e\cos\varphi+\frac{3r_g^2e}{4J^2}\varphi\sin\varphi\right)$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле

$$u = \frac{r_g}{2J^2}\left(1 + e\cos\varphi + \frac{3r_g^2 e}{4J^2}\varphi\sin\varphi\right)$$

$$\cos\left(\varphi - \frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right) = \cos\varphi\cos\left(\frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right) - \sin\varphi\sin\left(\frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right)$$

$$\sin\left(\frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right) \approx \frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi \qquad \cos\left(\frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right) \approx 1$$

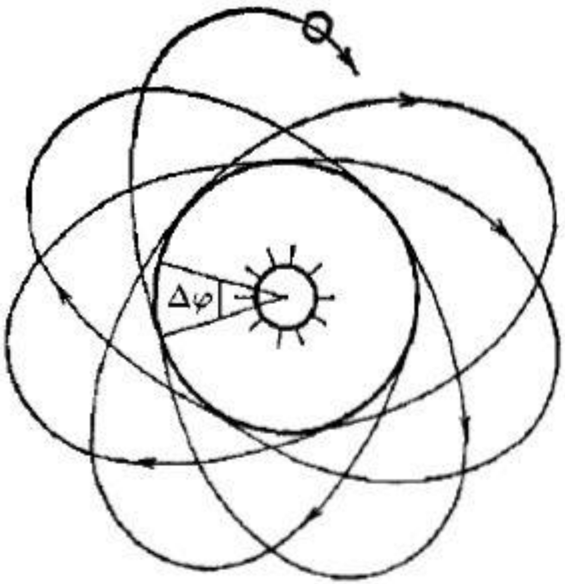
$$\cos\left(\varphi - \frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right) = \cos\varphi - \frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\sin\varphi$$

$$u = \frac{r_g}{2J^2}\left[1 + e\cos\left(\varphi - \frac{3r_g^2}{4J^2}\varphi\right)\right]$$

$$\varphi\left(1 - \frac{3r_g^2}{4J^2}\right) = 2\pi \qquad \varphi = \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{3r_g^2}{4J^2}\right)} \approx 2\pi\left(1 + \frac{3r_g^2}{4J^2}\right) = 2\pi + \Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi r_g^2}{2J^2} = \frac{6\pi G_N^2 m^2}{J^2 c^4}$$

Движение частиц в центрально-симметричном поле



$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = J = \text{const} \qquad m' r^2 \frac{d\varphi}{dt} = L = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$r^2 \frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt} = J \qquad m' r^2 \frac{d\varphi}{dt} = m' c J$$

$$m' c J = L \quad \Rightarrow \quad J = \frac{L}{m' c}$$

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi G_N^2 m^2}{J^2 c^4} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{6\pi G_N^2 m^2 m'^2}{L^2 c^2}$$

Для Меркурия смещение перигелия, вычисленное по этой формуле, составляет $\Delta\varphi \approx 43{,}9''$ за столетие.

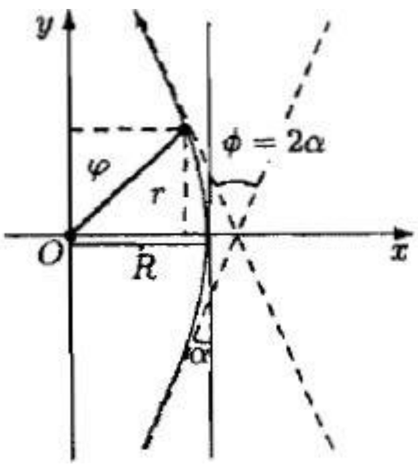
Отклонение лучей света в центрально-симметричном поле

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \qquad ds = 0$$

$$r = \frac{1}{u} \qquad E^2 - J^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 - J^2u^2 + J^2 r_g u^3 = 0$$

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{E^2}{J^2} + r_g u^3 \qquad 2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u\frac{du}{d\varphi} = 3r_g u^2\frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}r_g u^2$$



Нулевое приближение:

$$u_0 = C\cos(\varphi + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad u_0 = \frac{1}{R}\cos\varphi$$

$$r = \frac{R}{\cos\varphi}$$

Отклонение лучей света в центрально-симметричном поле

***Первое приближение*:**

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3}{2}r_g u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g}{2R^2}\cos^2\varphi$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g}{4R^2}\left(1+\cos 2\varphi\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g}{4R^2} \quad \Rightarrow \quad u_{11}=\frac{3r_g}{4R^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3r_g}{4R^2}\cos 2\varphi \quad \Rightarrow \quad u_{12}=-\frac{r_g}{4R^2}\cos 2\varphi$$

$$u=\frac{1}{R}\cos\varphi+\frac{r_g}{4R^2}\left(3-\cos 2\varphi\right)=\frac{1}{R}\cos\varphi+\frac{r_g}{2R^2}\left(1+\sin^2\varphi\right)$$

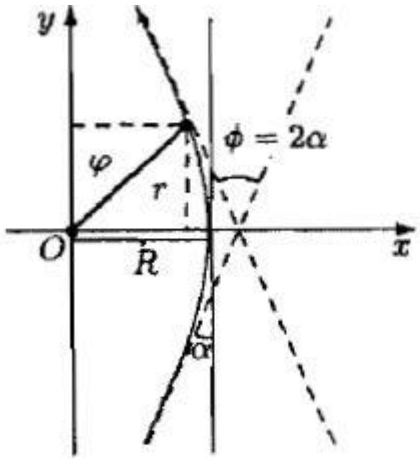
Отклонение лучей света в центрально-симметричном поле

$$u = \frac{1}{R}\cos\varphi + \frac{r_g}{2R^2}\left(1 + \sin^2\varphi\right)$$

$$u = \frac{1}{r} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{x}{Rr} + \frac{r_g}{2R^2}\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$R = x + \frac{r_g}{2R}\frac{r^2 + y^2}{r} \qquad x = R - \frac{r_g}{2R}\frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



Траектория луча света симметрична относительно горизонтальной оси. Угол отклонения ϕ равен удвоенному углу α между асимптотой траектории и осью y, $\phi = 2\alpha$. Угол α является углом наклона касательной к траектории при $y \to \pm\infty$.

$$\lim_{y\to\pm\infty} x = R - \frac{r_g}{2R}\lim_{y\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{y} + 2y}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + 1}} = R \mp \frac{r_g}{R}y \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{dx}{dy} = \mp\frac{r_g}{R} \qquad \alpha \approx \mp\frac{r_g}{R} \qquad \phi = 2\alpha = \frac{2r_g}{R}$$

Для лучей света, проходящих вблизи поверхности Солнца, $\phi = 1{,}75''$.