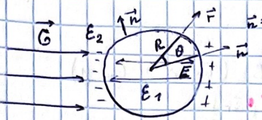
N 1



$\vec n = \frac{\vec r}{r}$ $\qquad \varphi_1 - ?$ $\qquad$ 4.03.2024г.

$\varphi_2 - ?$

$$\boxed{\varphi_2 = -(\vec G \vec r) - \frac{(\vec P \vec r)}{r^3}}$$ — сфера

$$\Delta \varphi_1 = 0$$
$$\varphi_1\Big|_{r=0} < \infty$$
→ φ_1 не уходит на ∞ в центре шара

$$\boxed{\varphi_1 = -(\vec E \vec r) = -B(\vec G \vec r)}$$

$$\mathcal{P} = P \cdot V = \varkappa E \cdot V \overset{(E = AG)}{=} A \cdot \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} \cdot G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = A \cdot \frac{1}{3}(\varepsilon_2 - 1) \cdot G \cdot R^3$$

Внешнее поле; поляр. внутри; объем

$$\varphi_2 = -(\vec G \vec r) - \frac{A \cdot R^3}{3}(\varepsilon_2 - 1) \cdot \frac{(\vec G \vec r)}{r^3}$$

Гранич. усл.: $\begin{cases} \varphi_1(R) = \varphi_2(R) & (1) \\ D_{n_1}(R) = D_{n_2}(R) \end{cases} \Rightarrow \frac{d\varphi_1}{dn}\Big|_{r=R} = \frac{d\varphi_2}{dn}\Big|_{r=R} \quad (2)$

(1): $-B(\vec G \vec r) = -(\vec G \vec r) \cdot \left(1 + \frac{AR^3}{3}(\varepsilon_2 - 1) \cdot \frac{1}{R^3}\right)$

$$B = 1 + \frac{A}{3}(\varepsilon_2 - 1)$$

(2): $\vec E_1 = -\operatorname{grad}\varphi = B \cdot (G_x \cdot \vec i + G_y \cdot \vec j + G_z \cdot \vec k)$

$$\vec D_1 = \varepsilon_1 \vec E_1 = \varepsilon_1 \cdot B \cdot \vec G$$

$$E_2 = \left| \left(\frac{(\vec G \vec r)}{r^3}\right)' = \frac{\vec G r^3 - (\vec G \vec r) \cdot 3r\vec r}{r^6} \right| = \vec G + \frac{\vec G r^2 - 3(\vec G \vec r)\vec r}{r^5} \cdot \frac{AR^3}{3}(\varepsilon_2 - 1)$$

$$\vec D_2 = \varepsilon_2 \cdot \vec E_2 =$$

$$D_{n_1} = \varepsilon_1 \cdot B \cdot G \cdot \cos\theta$$

$$D_{n_2} = G \cdot \cos\theta \cdot \varepsilon_2 + \cos\theta \cdot \frac{Gr^2 - 3Gr^2}{r^5} \cdot \frac{AR^3}{3} \cdot (\varepsilon_2 - 1) \cdot \varepsilon_2$$

$$D_{n_1} = D_{n_2} \Rightarrow \varepsilon_1 \cdot B \cdot \cancel{G} \cdot \cancel{\cos\theta} = \cancel{G} \cdot \cancel{\cos\theta} \cdot \varepsilon_2 + \cancel{\cos\theta} \cdot \frac{\cancel{G}R^2 - 3\cancel{G}R^2}{\cancel{R^5}} \cdot \frac{AR^3}{3} \cdot (\varepsilon_2 - 1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \cdot B = \varepsilon_2 + \frac{(1-3) \cdot A}{3}(\varepsilon_2 - 1) \cdot \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 \cdot B = \varepsilon_2 - \frac{2A}{3} \cdot (\varepsilon_2 - 1) \cdot \varepsilon_2$$

$B = 1 + \frac{A}{3}(\varepsilon_2 - 1)$, обозначим $\frac{A}{3}(\varepsilon_2 - 1) = y$:

$$\varepsilon_1 \cdot (1 + y) = \varepsilon_2 - 2 \cdot y \cdot \varepsilon_2$$

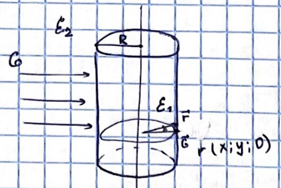
$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = y \cdot (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$$

$$y = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

$$A = \frac{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_2 - 1)}$$

$$B = 1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} = \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1}$$

N2



$$\varphi_1 = -B\cdot(\vec{G}\vec{r}) = -B\cdot(G_x\cdot x + G_y\cdot y)$$

$$\varphi_2 = -(\vec{G}\vec{r}) + \frac{A\cdot(\vec{G}\vec{r})}{r^2} \quad \text{цилиндр}$$

можно и через «-»

Гранич. усл.: $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ (1)

$D_{n_1}(R) = D_{n_2}(R)$ (2)

(1): $-B\cdot \cancel{G}\cdot\cancel{R}\cdot\cancel{\cos\theta} = -\cancel{G}\cdot\cancel{R}\cdot\cancel{\cos\theta} + \frac{A\cdot\cancel{GR}\cdot\cancel{\cos\theta}}{R^2}$

$$-B = -1 + \frac{A}{R^2}$$

$$B = 1 - \frac{A}{R^2}$$

(2): $\vec{E}_1 = B\cdot(G_x\cdot\vec{i} + G_y\cdot\vec{j}) = B\cdot\vec{G}$

$$D_{1n} = BG\cdot\cos\theta\cdot\varepsilon_1$$

$-\text{grad}\,\varphi_2 = \vec{E}_2 = \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{G_x\cdot x + G_y\cdot y}{x^2+y^2}\right) = \frac{G_x\cdot(x^2+y^2) - (\vec{G}\vec{r})\cdot 2x}{r^4} = \right.$

$$= \left.\frac{G_x\cdot r^2 - (\vec{G}\vec{r})\cdot 2x}{r^4}\right| = \vec{G} - A\cdot\frac{\vec{G}r^2 - (\vec{G}\vec{r})\cdot 2\vec{r}}{r^4}$$

$$D_{n_2} = \varepsilon_2\cdot\left(G\cdot\cos\theta - A\cdot\frac{GR^2\cdot\cos\theta - GR\cdot\cos\theta\cdot 2R}{R^4}\right) = \varepsilon_2\cdot G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{A}{R^2}\right)$$

$$D_{1n} = D_{n_2}$$

$$B\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\varepsilon_1 = \varepsilon_2\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{A}{R^2}\right)$$

$$B\cdot\varepsilon_1 = \varepsilon_2\cdot\left(1+\frac{A}{R^2}\right)$$

$$B = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(1+\frac{A}{R^2}\right)$$

$$1 - \frac{A}{R^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot\left(1+\frac{A}{R^2}\right)$$

$$1 - \frac{A}{R^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot\frac{A}{R^2}$$

$$\frac{A}{R^2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}+1\right) = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$A = R^2\cdot\frac{1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}+1} = R^2\cdot\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cdot\cancel{\varepsilon_1}}{\cancel{\varepsilon_1}\cdot(\varepsilon_2+\varepsilon_1)} = R^2\cdot\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

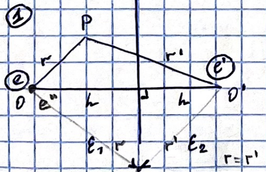
$$B = 1 - \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

Ландау §7 N1

поле от точеч. заряда

$$\varphi_1 = \frac{e}{r\cdot\varepsilon_1} + \frac{e'}{r'\cdot\varepsilon_1}$$

$$\varphi_2 = \frac{e''}{r\cdot\varepsilon_2}$$



гранич. усл.: (1) $\varphi_1\Big|_{r=r'} = \varphi_2\Big|_{r=r'} \Rightarrow \frac{e+e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}$

(2): $\varepsilon_1\cdot\frac{d\varphi_1}{dn}\Big|_{r=r'} = \varepsilon_2\cdot\frac{d\varphi_2}{dn}\Big|_{r=r'}$

(2): $\cancel{\varepsilon_1}\cdot\left(-\frac{e}{\cancel{\varepsilon_1}}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{e'}{\cancel{\varepsilon_1}}\cdot\frac{1}{r^2}\right) = -\cancel{\varepsilon_2}\cdot\frac{e''}{\cancel{\varepsilon_2}}\cdot\frac{1}{r^2}$

$$\frac{e}{r^2}-\frac{e'}{r^2}=\frac{e''}{r^2}$$

$$e-e'=e''$$

Д/з дорешать систему ур-ний
+
Ландау §7 N2
+
Ландау §8 N2
+
Векштейн 1.55

Домашняя работа N4

Гуевой Александры
3 курс 4 группа

Ландау §7 N1 (дорешать)

$$\frac{e+e'}{\varepsilon_1}=\frac{e''}{\varepsilon_2} \quad \text{и} \quad e-e'=e''$$

$$\frac{e+e'}{\varepsilon_1}=\frac{e-e'}{\varepsilon_2}$$

$$(e+e')\cdot\varepsilon_2=(e-e')\cdot\varepsilon_1$$

$$e\varepsilon_2+e'\cdot\varepsilon_2=e\cdot\varepsilon_1-e'\cdot\varepsilon_1$$

$$e'(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

$$e'=\frac{e\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

Тогда, $e''=e-\frac{e\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$

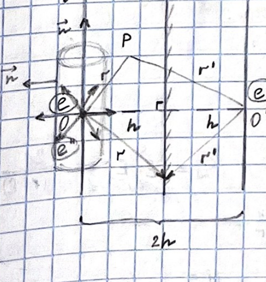
$$e''=\frac{\cancel{e\varepsilon_1}+e\varepsilon_2-\cancel{e\varepsilon_1}+e\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$e''=\frac{2e\cdot\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$ при $\varepsilon_2\to\infty$, $\varphi_2=0$

Из рис.: $F=\frac{e\cdot e'}{(2h)^2\cdot\varepsilon_1}=\frac{e}{(2h)^2\varepsilon_1}\cdot\frac{e\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}=\left(\frac{e}{2h}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1\cdot(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$

$F>0$ – отталкивание

Ландау §7 N2



Теор. Гаусса: $E\cdot S_{бок}=\frac{e\cdot l}{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_0}$

$$E\cdot2\pi r\cancel{l}=\frac{e\cancel{l}}{\varepsilon_1\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{e}{2\pi r\,\varepsilon_1\varepsilon_0}=2\cdot k\cdot\frac{e}{r\cdot\varepsilon_1}$$

опускаем k: $E=\frac{2e}{r\varepsilon_1}$

$$\varphi_1=-\int E\,dr-\int E'\,dr=-\frac{2e}{\varepsilon_1}\cdot\ln r-\frac{2e'}{\varepsilon_1}\ln r'$$

Аналогично для φ_2: $\varphi_2=-\frac{2e''}{\varepsilon_2}\cdot\ln r$

Гранич. условие: (1): $\varphi_1\big|_{r=r'} = \varphi_2\big|_{r=r'}$

$$-\frac{\cancel{2}e}{\varepsilon_1}\cdot \cancel{\ln r} - \frac{\cancel{2}e'}{\varepsilon_1}\cdot \cancel{\ln r} = -\frac{\cancel{2}e''}{\varepsilon_2}\cdot \cancel{\ln r}$$

$$-\frac{e}{\varepsilon_1} - \frac{e'}{\varepsilon_1} = -\frac{e''}{\varepsilon_2}$$

$$\frac{-(e+e')}{\varepsilon_1} = -\frac{e''}{\varepsilon_2} \Rightarrow \frac{e+e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2}$$

(2): $\varepsilon_1\cdot\frac{d\varphi_1}{dr}\Big|_{r=r'} = \varepsilon_2\cdot\frac{d\varphi_2}{dr}\Big|_{r=r'}$

$$\varepsilon_1\cdot\left(-\frac{2e}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{r} + \frac{2e'}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{r}\right) = \varepsilon_2\cdot\left(-\frac{2e''}{\varepsilon_2}\cdot\frac{1}{r}\right)$$

$$-\frac{\cancel{2}e}{r} + \frac{\cancel{2}e'}{r} = -\frac{\cancel{2}e''}{r} \quad \Big|\cdot r$$

$$-e+e' = -e'' \Rightarrow e-e' = e''$$

$$\frac{e+e'}{\varepsilon_1} = \frac{e-e'}{\varepsilon_2}$$

$$e\varepsilon_2 + e'\cdot\varepsilon_2 = e\varepsilon_1 - e'\varepsilon_1$$

$$e'(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

$$e' = \frac{e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$e'' = e - \frac{e(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

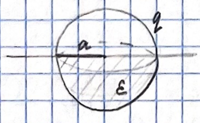
$$e'' = \frac{e\cancel{\varepsilon_1} + e\varepsilon_2 - e\cancel{\varepsilon_1} + e\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$e'' = \frac{2e\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

$$F = \frac{2\cdot e\cdot e'}{2h\cdot\varepsilon_1} = \frac{e^2\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{h\cdot\varepsilon_1\cdot(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

Векштейн № 1.55

Показать, что если заряженный проводящий шар погрузить наполовину в однородный жидкий диэлектрик, то создаваемое шаром поле остаётся сферически симметричным. Заряд шара q, радиус его a. Найти распределение зарядов на шаре. Проницаемость диэлектрика ε.



Нужно, чтобы $\varphi = \frac{C}{r}$ удовлетв. гранич. условиям во всём пространстве вне шара

Теорема Остроградского-Гаусса:

$$\oint D_n\, dS = 4\pi q$$

$$\xrightarrow{\text{полусфера}} \frac{1}{2}\cdot D\cdot \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi} q$$

$$D = \frac{2q}{r^2} \qquad E = \frac{D}{\underbrace{\varepsilon_1}_{1\ (\text{воздух})} + \underbrace{\varepsilon_2}_{\varepsilon}} = \frac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot r^2}$$

$$\varphi = -\int E\,dr = -\frac{2q}{(1+\varepsilon)}\cdot -\frac{1}{r} =$$

$$= \frac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot r}$$

$$\varphi = \frac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot r} = \frac{c}{r}$$

$$c = \frac{2q}{1+\varepsilon}$$

Найдём поверх. пл-ть: $D_{n_1} - D_{n_2} = 4\pi\sigma$

$$\underset{1}{\varepsilon_1} E_{n_1} - \underset{\varepsilon}{\varepsilon_2} \cdot E_{n_2} = 4\pi\sigma$$

$$E_{n_1} - \varepsilon \cdot E_{n_2} = 4\pi\sigma$$

$$\varphi = \frac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot r}$$

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{2q}{(1+\varepsilon)} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2q}{(1+\varepsilon) r^2}$$

Тогда, в воздухе: $\sigma = \dfrac{E_{n_1}}{4\pi} = \dfrac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot 4\pi a^2}$

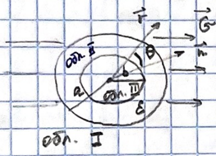
$$\sigma = \frac{q}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2}$$

в диэлектрике: $\sigma = \dfrac{\varepsilon E_{n_2}}{4\pi} = \dfrac{\varepsilon \cdot 2q}{4\pi a^2 (1+\varepsilon)}$

$$\sigma = \frac{\varepsilon q}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2}$$

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{q}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2} & \text{(в воздухе)} \\ \dfrac{\varepsilon q}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2} & \text{(в диэлектрике)} \end{cases}$$

Ландау §8 N2: Диэлектр. полый шар (диэлектр. прониц. ε, внутр. и внешний радиусы b и a) находится в однородном внешнем электр. поле $\mathfrak{E}$. Определить поле в полости шара.



$$\varphi = -(\vec{\mathfrak{E}}\vec r) - \frac{(\vec{\mathcal{P}}\vec r)}{r^3}$$

$$\varphi_1 = -\mathfrak{E}\cdot\cos\theta\cdot\left(r - \frac{A}{r^2}\right) = -(\vec{\mathfrak{E}}\vec r) - \frac{(\vec E \vec r)}{r^3}$$

$$\varphi_3 = -B\cdot \mathfrak{E}\cdot r\cdot\cos\theta = -(\vec E\vec r)$$

в диэлектр. слое $\rightarrow \varphi_2 = -C\cdot\mathfrak{E}\cdot\cos\theta\cdot\left(r - \frac{D}{r^2}\right) = -(\vec E\vec r) - \frac{(\vec E\vec r)}{r^3}$

Гранич. усл.: $\begin{cases} \varphi_1(R) = \varphi_2(R) \\ D_{n_1}(R) = D_{n_2}(R) \end{cases} \Rightarrow \left.\dfrac{d\varphi_1}{dr}\right|_{r=R} = \left.\dfrac{d\varphi_2}{dr}\right|_{r=R}$

$$\begin{cases} \varphi_2(R) = \varphi_3(R) \\ \left.\dfrac{d\varphi_2}{dr}\right|_{r=R} = \left.\dfrac{d\varphi_3}{dr}\right|_{r=R} \end{cases}$$

1) $-\cancel{\mathfrak{E}}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(r - \frac{A}{r^2}\right) = -C\cdot\cancel{\mathfrak{E}}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(r - \frac{D}{r^2}\right)$

$$-r + \frac{A}{r^2} = -C\left(r + \frac{D}{r^2}\right) \quad (*)$$

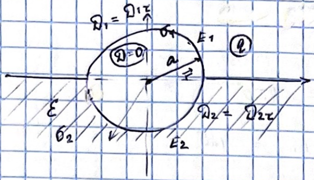
$$-C\cdot\cancel{\mathfrak{E}}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(r - \frac{D}{r^2}\right) = -B\cdot r\cdot\cancel{\mathfrak{E}}\cdot\cancel{\cos\theta}$$

$$-C\cdot\left(r - \frac{D}{r^2}\right) = -B\cdot r \quad (**)$$

Объединим $(*)$ и $(**)$: $-r + \dfrac{A}{r^2} = -Br$

$$\frac{A}{r^2} = r\cdot(1 - B)$$

Векштейн 1.55 (из 913) 11.03.2024г.



$$\varphi = \frac{c}{r}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{c}{r}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right) = 0$$

удовл. ур-нию Лапласа

т.е. $div(grad\,\varphi) = 0$

Теорема Остогр. Гаусса (для полусферы) : $\oint D_n\, dS = 4\pi q$

$$\frac{1}{2}\cdot D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$$

$$D = \frac{2q}{r^2}$$

$$D_1 + D_2 = \frac{2q}{r^2}$$

$$D_1 = \frac{D_2}{\varepsilon} \Rightarrow D_2 = \varepsilon\cdot D_1$$

$$\varepsilon\cdot D_1 + D_1 = \frac{2q}{r^2}$$

$$D_1 = \frac{2q}{(\varepsilon+1)\cdot r^2} = E_1 = E_2$$

$$D_2 = \frac{2q\cdot\varepsilon}{(\varepsilon+1)\cdot r^2}$$

$$\varphi = -\int E\,dr = -\int\frac{2q}{(\varepsilon+1)r^2}dr = \frac{2q}{\varepsilon+1}\cdot\frac{1}{r}$$

Гранич. условие: $\underset{\text{воздух}}{D_{n_1}} - \underset{\text{диэлектрик}}{D_{n_2}} = 4\pi\sigma \Rightarrow \underset{=1}{\varepsilon_1}\cdot E_{n_1} - \varepsilon\cdot E_{n_2} = 4\pi\sigma$

$$E_{n_1} - \varepsilon\cdot E_{n_2} = 4\pi\sigma$$

$$\vec{E} = -grad\,\varphi = -\frac{2q}{\varepsilon+1}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2q}{(\varepsilon+1)\cdot r^2}$$

Воздух: $E_{n_1} = 4\pi\sigma$

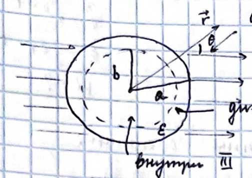
$$\sigma = \frac{E_{n_1}}{4\pi} = \frac{2q}{(1+\varepsilon)\cdot 4\pi a^2} = \frac{q}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2}$$

Диэлектрик: $\varepsilon E_{n_2} = D_{n_2} = 4\pi\sigma$

$$\sigma = \frac{\varepsilon\cdot E_{n_2}}{4\pi} = \frac{\varepsilon\cdot 2q}{(1+\varepsilon)\cdot 4\pi\cdot a^2} = \frac{q\cdot\varepsilon}{(1+\varepsilon)\cdot 2\pi a^2}$$

Ландау §8 N2

вклад поле диполя



$$\varphi_I = -G\cos\theta\cdot\left(r-\frac{A}{r^2}\right)$$

$$\varphi_{II} = -C\cdot G\cos\theta\cdot\left(r-\frac{D}{r^2}\right)$$

$$\varphi_{III} = -BG\cdot r\cdot\cos\theta\quad,\ \theta = (\widehat{\vec G\vec r})$$

Гранич. условия: 1) $\begin{cases}\varphi_1(a) = \varphi_2(a) & (1)\\ \varphi_2(b) = \varphi_3(b) & (2)\end{cases}$

2) $\begin{cases}D_{n1}(a) = D_{n2}(a)\\ D_{n2}(b) = D_{n3}(b)\end{cases}$

(1): $-\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(a-\frac{A}{a^2}\right) = -C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(a-\frac{D}{a^2}\right) \rightarrow a-\frac{A}{a^2} = C\left(a-\frac{D}{a^2}\right)$

(2): $-C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(b-\frac{D}{b^2}\right) = -B\cdot\cancel{G}\cdot b\cdot\cancel{\cos\theta} \rightarrow C\cdot\left(b-\frac{D}{b^2}\right) = B\cdot b$

$\vec E_1 = -\overline{\text{grad}}\,\varphi_1$

$\text{grad}_r\,\varphi = \frac{d\varphi}{dr}$ – в сфер. коорд.

$\vec E_1 = -\overline{\text{grad}}\,\varphi_1 = G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{2A}{r^3}\right)\cdot\vec n + \dots$

Но нам нужна только нормальная составляющая, поэтому

$E_{1n} = G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{2A}{r^3}\right)$

$E_{2n} = C\cdot G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{2D}{r^3}\right)$

$E_{3n} = B\cdot G\cdot\cos\theta$

$\begin{cases}E_{1n}(a) = \varepsilon\cdot E_{2n}(a) & (3)\\ \varepsilon\cdot E_{2n}(b) = E_{3n}(b) & (4)\end{cases}$

(3): $\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{2A}{a^3}\right) = \varepsilon\cdot C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{2D}{a^3}\right) \rightarrow 1+\frac{2A}{a^3} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{2D}{a^3}\right)$

(4): $B\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta} = \varepsilon\cdot C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{2D}{b^3}\right) \rightarrow B = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{2D}{b^3}\right)$

Система ур-ний: $\begin{cases}a-\frac{A}{a^2} = C\cdot\left(a-\frac{D}{a^2}\right)\\ C\cdot\left(b-\frac{D}{b^2}\right) = B\cdot b\\ 1+\frac{2A}{a^3} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{2D}{a^3}\right)\\ B = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{2D}{b^3}\right)\end{cases}$

дорешать систему дома!

Энергия поле в диэлектриках

N1 $\boxed{W = \int\frac{\vec E\vec D}{8\pi}\,dV}$:

ищем поле внутри

$\oint D_n dS = 4\pi q$

$D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$

$q = \int\rho\,dV = \int\rho_0 r^5\,dV = \int\rho_0\cdot r^5\cdot\underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV} = \rho_0\cdot 4\pi\cdot\frac{r^8}{8} = \frac{\rho_0\cdot\pi\cdot r^8}{2}$

$D\cdot r^2 = \frac{\rho_0\cdot\pi\cdot r^8}{2}$

$D = \frac{\rho_0\cdot\pi\cdot r^6}{2}$

$\rho = \rho_0\cdot r^5$

$\varepsilon = \varepsilon_1\cdot r^4$

$W - ?$

$D = \varepsilon\cdot E \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\pi\rho_0\cdot r^6}{2\varepsilon} = \frac{\pi\cdot\rho_0\cdot r^6}{2\cdot\varepsilon_1\cdot r^4} = \frac{\pi\cdot\rho_0\cdot r^2}{2\cdot\varepsilon_1}$

$W = \frac{1}{8\pi}\int_0^a\frac{\pi\rho_0\cdot r^2}{2\cdot\varepsilon_1}\cdot\frac{\rho_0\cdot\pi\cdot r^6}{2}\,dV = \frac{\pi\cdot\rho_0^2}{32\,\varepsilon_1}\int_0^a r^8\cdot 4\pi r^2 dr =$

$= \frac{\pi\rho_0^2}{32\,\varepsilon_1}\cdot 4\pi\cdot\frac{r^{11}}{11}\Big|_0^a = \frac{(\pi\cdot\rho_0)^2}{8\cdot\varepsilon_1}\cdot\frac{a^{11}}{11} = \frac{(\pi\cdot\rho_0)^2\cdot a^{11}}{88\cdot\varepsilon_1}$

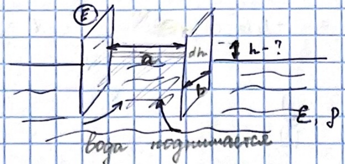
Ландау § 10 N 1 : Опред. высоту жидкости, втянутую конденсатором

Д/з

$\rho = \rho_0 \cdot r^6$

$\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot r^3$

$W - ?$



Свобод. энергия системы:

$$F = E_{пот.} - \int \frac{E \cdot D}{8\pi} dV$$

$E_{пот.} = mgh$

$$E_{пот.} = \int dE_{пот} = \int dm\, g h = \left| dm = \rho dV \right| =$$

$$= \int \rho dV g \cdot h$$

$$dV = b \cdot a \cdot dh$$

Тогда, $E_{пот.} = \int_0^h g \cdot \rho \cdot b \cdot a \cdot h \cdot dh = \frac{g \cdot \rho \cdot b \cdot a \cdot h^2}{2}$

$$E = const \Rightarrow \underbrace{\Delta W}_{\text{должна стоять разность}} = \frac{E \cdot \Delta D}{8\pi} \cdot V = \frac{E \cdot V}{8\pi} \cdot (D_2 - D_1) = \frac{E \cdot V}{8\pi}(\varepsilon E - E) =$$

$$= \frac{E^2 V}{8\pi} \cdot (\varepsilon - 1) = \frac{E^2(\varepsilon - 1)}{8\pi} \cdot ab\, h$$

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \left(g\rho \cdot h^2 - \frac{E^2(\varepsilon - 1) \cdot h}{8\pi} \right)$$

F должна быть min =>

$$\Rightarrow \frac{dF}{dh} = 0 : ab \cdot \left(\rho g h - \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) \right) = 0$$

$$h = \frac{E^2 \cdot (\varepsilon - 1)}{8\pi \cdot \rho \cdot g}$$

Д/з Иродов N 2. 150

\+

Ландау § 8 N 3

Домашняя работа №5 Гусевой Александры
3 курс 4 группа

Ландау §8 №2 (дорешать систему)

$$\begin{cases} a - \frac{A}{a^2} = c\cdot\left(a - \frac{D}{a^2}\right) & (1) \\ c\cdot\left(b - \frac{D}{b^2}\right) = B\cdot b & (2) \\ 1 + \frac{2A}{a^3} = \varepsilon\cdot c\cdot\left(1 + \frac{2D}{a^3}\right) & (3) \\ B = \varepsilon\cdot c\cdot\left(1+\frac{2D}{b^3}\right) & (4) \end{cases}$$

$(2) \rightarrow B = \frac{c(b - \frac{D}{b^2})}{b} = c - \frac{cD}{b^3} = c\left(1 - \frac{D}{b^3}\right)$ (*)

Подставим (*) в (4):
$$\cancel{c}\cdot\left(1 - \frac{D}{b^3}\right) = \varepsilon\cdot\cancel{c}\cdot\left(1 + \frac{2D}{b^3}\right)$$
$$1 - \frac{D}{b^3} = \varepsilon + \varepsilon\cdot\frac{2D}{b^3}$$
$$1 - \varepsilon = \frac{D}{b^3} + \varepsilon\cdot\frac{2D}{b^3} = \frac{D + 2\varepsilon D}{b^3}$$
$$b^3 - \varepsilon b^3 = D(1 + 2\varepsilon)$$
$$D = \frac{b^3\cdot(1-\varepsilon)}{1+2\varepsilon}$$

Из (1) $\Rightarrow a^3 - A = c\cdot a^2\cdot\left(a - \frac{D}{a^2}\right) \rightarrow A = a^3 - c\cdot(a^3 - D)$ (**)

Подставим в (3):
$$1 + \frac{2A}{a^3} = \varepsilon\cdot c\cdot\left(1 + \frac{2D}{a^3}\right)$$
$$1 + \frac{2(a^3 - c(a^3 - D))}{a^3} = \varepsilon\cdot c\cdot\left(1 + \frac{2D}{a^3}\right)$$
$$1 + 2 - \frac{2c(a^3-D)}{a^3} = \varepsilon\cdot c\left(\frac{a^3}{1} + \frac{2D}{a^3}\right)$$
$$3 - \frac{2\cdot c\cdot(a^3 - D)}{a^3} = \varepsilon\cdot c\cdot\frac{(a^3+2D)}{a^3}$$
$$3 = \varepsilon\cdot c\cdot\frac{(a^3+2D)}{a^3} + 2\cdot c\cdot\frac{(a^3-D)}{a^3}$$
$$3 = \frac{c\cdot(\varepsilon\cdot(a^3+2D) + 2\cdot(a^3 - D))}{a^3}$$
$$3a^3 = c\cdot(\varepsilon a^3 + 2\varepsilon D + 2a^3 - 2D)$$
$$c = \frac{3a^3}{a^3(\varepsilon+2) + 2D(\varepsilon - 1)}$$
$$c = \frac{3a^3}{a^3\cdot(\varepsilon+2) + \frac{(-2b^3(\varepsilon-1)^2)}{1+2\varepsilon}}$$
$$c = \frac{3a^3\cdot(1+2\varepsilon)}{a^3\cdot(\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Тогда из (*): $B = c\cdot\left(1 - \frac{D}{b^3}\right)$

$$B = \frac{3a^3\cdot(1+2\varepsilon)}{a^3\cdot(\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\left(1 - \frac{\cancel{b^3}\cdot(1-\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)\cdot\cancel{b^3}}\right)$$

$$\frac{1+2\varepsilon - 1 + \varepsilon}{1+2\varepsilon} = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

$$B = \frac{3a^3 \cdot \cancel{(1+2\varepsilon)}}{a^3\cdot(\varepsilon+2)(1+2\varepsilon) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2} \cdot \frac{3\varepsilon}{\cancel{1+2\varepsilon}}$$

$$B = \frac{9\varepsilon a^3}{a^3\cdot(\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

И из (**) $\Rightarrow$ $A = a^3 - C\cdot(a^3 - D)$

$$A = a^3 - \frac{3a^3\cdot(1+2\varepsilon)}{a^3\cdot(1+2\varepsilon)\cdot(\varepsilon+2) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\left(a^3 - \frac{b^3\cdot(1-\varepsilon)}{1+2\varepsilon}\right)$$

$$A = a^3 - \frac{3a^3\cdot(1+2\varepsilon)}{a^3\cdot(1+2\varepsilon)\cdot(\varepsilon+2) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\frac{a^3(1+2\varepsilon) - b^3\cdot(1-\varepsilon)}{\cancel{1+2\varepsilon}}$$

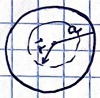
$$A = a^3 - \frac{3a^3\left((1+2\varepsilon)a^3 - b^3\cdot(1-\varepsilon)\right)}{a^3\cdot(1+2\varepsilon)\cdot(\varepsilon+2) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Мы сказали, что поле $E_3 = B\cdot G$ внутри полости оказывается однородным! Поэтому поле в полости шара:

$$E_3 = B\cdot G = G\cdot\frac{9\varepsilon\cdot a^3}{a^3(\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2b^3\cdot(\varepsilon-1)^2} = G\frac{9\varepsilon\cdot a^3}{a^3\cdot\left((\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot(\varepsilon-1)^2\right)}$$

$$E_3 = G\cdot\frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)\cdot(1+2\varepsilon) - 2\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Задача:



$\rho = \rho_0\cdot r^6$

$\varepsilon = \varepsilon_1\cdot r^3$

W - ?

$$\oint D_n\, dS = 4\pi q$$
$$D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi q$$
$$D = \frac{q}{r^2}$$

$$q = \int\rho\, dV = \int\rho_0\cdot r^6\cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0\cdot\int r^8 dr = 4\pi\rho_0\cdot\frac{r^9}{9}$$

Тогда, $D = \frac{4\pi\rho_0\cdot r^9}{9r^2} = \frac{4\pi\rho_0\cdot r^7}{9}$

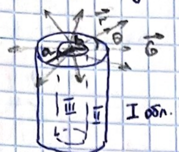
$$D = \varepsilon\cdot E \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi\rho_0\cdot r^7}{9\cdot\varepsilon_1\cdot r^3} = \frac{4\pi\rho_0\cdot r^4}{9\varepsilon_1}$$

$$W = \int\frac{ED}{8\pi}dV$$

$$W = \int_0^a \frac{4\pi\rho_0\cdot r^4}{9\varepsilon_1}\cdot\frac{4\pi\rho_0\cdot r^7}{9}\cdot\frac{1}{8\pi}dV = \frac{2\rho_0^2\cdot\pi}{81\cdot\varepsilon_1}\cdot\int_0^a r^{11}\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi^2\cdot\rho_0^2}{81\cdot\varepsilon_1}\cdot\int_0^a r^{13}dr = \frac{8\pi^2\cdot\rho_0^2}{81\cdot\varepsilon_1}\cdot\frac{a^{14}}{14} = \frac{2\pi^2\cdot\rho_0^2\cdot a^{14}}{567\cdot\varepsilon_1}$$

Ландау §8 №3

Диэлектр. полый цилиндр (ε, внутр. радиус – b, внешний – a) находится в поперечном однород. поле G. Опред. поле в полости цилиндра.



$$\theta = (\widehat{\vec{G}\vec{r}})$$

$$\varphi_1 = -G\cdot\cos\theta\cdot\left(r-\frac{A}{r}\right) \quad \text{цилиндр}$$

$$\varphi_2 = -C\cdot G\cdot\cos\theta\cdot\left(r-\frac{D}{r}\right)$$

$$\varphi_3 = -B\cdot G\cdot r\cdot\cos\theta$$

Граничные условие:
$$\begin{cases}\varphi_1(a) = \varphi_2(a) & (1)\\ \varphi_2(b) = \varphi_3(b) & (2)\end{cases} \qquad \begin{cases}D_{n1}(a) = D_{n2}(a) & (3)\\ D_{n2}(b) = D_{n3}(b) & (4)\end{cases}$$

(1): $$-\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(a-\frac{A}{a}\right) = -C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(a-\frac{D}{a}\right)$$
$$a-\frac{A}{a} = C\cdot\left(a-\frac{D}{a}\right)$$

(2): $$-C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(b-\frac{D}{b}\right) = -B\cdot\cancel{G}\cdot b\cdot\cancel{\cos\theta}$$
$$C\cdot\left(b-\frac{D}{b}\right) = Bb$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

В цилиндр. коорд.: $$\operatorname{grad}\varphi = \underbrace{\vec{e}_\rho\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}}_{\text{нормаль}} + \vec{e}_\theta\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{e}_z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$E_{n1} = G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{A}{r^2}\right)$$
$$E_{n2} = C\cdot G\cdot\cos\theta\cdot\left(1+\frac{D}{r^2}\right)$$
$$E_{n3} = B\cdot G\cdot\cos\theta$$

Тогда
$$\begin{cases}E_{n1}(a) = \varepsilon\cdot E_{n2}(a)\\ \varepsilon\cdot E_{n2}(b) = E_{n3}(b)\end{cases}$$

(3): $$\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{A}{a^2}\right) = \varepsilon\cdot C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{D}{a^2}\right)$$
$$1+\frac{A}{a^2} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{D}{a^2}\right)$$

(4): $$\varepsilon\cdot C\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}\cdot\left(1+\frac{D}{b^2}\right) = B\cdot\cancel{G}\cdot\cancel{\cos\theta}$$
$$\varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{D}{b^2}\right) = B$$

Значит, система ур-ний выглядит след. образом:
$$\begin{cases}a-\frac{A}{a} = C\cdot\left(a-\frac{D}{a}\right) & \underline{(1)}\\ C\cdot\left(b-\frac{D}{b}\right) = B\cdot b & \underline{(2)} \quad\rightarrow\quad B = \frac{C\left(b-\frac{D}{b}\right)}{b} = C\cdot\left(1-\frac{D}{b^2}\right) \quad \underline{(*)}\\ 1+\frac{A}{a^2} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{D}{a^2}\right) & \underline{(3)}\\ \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{D}{b^2}\right) = B & \underline{(4)}\end{cases}$$

Подставим (*) в (4): $$\varepsilon\cdot\cancel{C}\cdot\left(1+\frac{D}{b^2}\right) = \cancel{C}\cdot\left(1-\frac{D}{b^2}\right)$$
$$\varepsilon+\varepsilon\cdot\frac{D}{b^2} = 1-\frac{D}{b^2}$$
$$\frac{D}{b^2}(\varepsilon+1) = 1-\varepsilon$$
$$D(\varepsilon+1) = (1-\varepsilon)\cdot b^2 \Rightarrow D = \frac{(1-\varepsilon)\cdot b^2}{\varepsilon+1}$$

Из (1) $\Rightarrow$ $$a/a - \frac{A}{a} = C\cdot\left(\frac{a}{a} - \frac{D}{a}\right)$$

$$\frac{a^2-A}{a} = C\cdot\frac{a^2-D}{a} \quad |\cdot a$$

$$a^2 - A = C\cdot(a^2-D)$$

$$A = a^2 - C\cdot(a^2-D) \qquad \underline{(**)}$$

Подставим в (3): $$1 + \frac{A}{a^2} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(1+\frac{D}{a^2}\right)$$

$$1 + \frac{a^2 - C\cdot(a^2-D)}{a^2} = \varepsilon\cdot C\cdot\left(\frac{a^2}{1} + \frac{D}{a^2}\right)$$

$$1 + 1 - \frac{C\,(a^2-D)}{a^2} = \varepsilon\cdot C\cdot\frac{a^2+D}{a^2}$$

$$2 = C\cdot\frac{\varepsilon(a^2+D) + (a^2-D)}{a^2}$$

$$2a^2 = C\cdot\left(\varepsilon(a^2+D) + a^2 - D\right)$$

$$C = \frac{2a^2}{\varepsilon\cdot(a^2+D) + a^2 - D} = \frac{2a^2}{a^2\cdot(\varepsilon+1) + D(\varepsilon-1)}$$

Подставляем уже найденное D: $$C = \frac{2a^2}{a^2\cdot(\varepsilon+1) + \frac{(1-\varepsilon)\cdot b^2}{\varepsilon+1}\cdot(\varepsilon-1)}$$

$$C = \frac{2a^2}{{}^{\varepsilon+1/}a^2\cdot(\varepsilon+1) - \frac{(\varepsilon-1)^2\cdot b^2}{\varepsilon+1}}$$

$$C = \frac{2a^2\cdot(\varepsilon+1)}{a^2(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Из (*): $$B = C\cdot\left(1 - \frac{D}{b^2}\right)$$

Подставим C и D: $$B = \frac{2a^2\cdot(\varepsilon+1)}{a^2\cdot(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\left(\frac{\varepsilon+1}{1} - \frac{(1-\varepsilon)\cdot \cancel{b^2}}{(\varepsilon+1)\cdot\cancel{b^2}}\right)$$

$$\frac{\varepsilon+1-1+\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}$$

$$B = \frac{2a^2\cdot\cancel{(\varepsilon+1)}}{a^2\cdot(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\frac{2\varepsilon}{\cancel{(\varepsilon+1)}}$$

$$B = \frac{4\varepsilon a^2}{a^2\cdot(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Из (**): $$A = a^2 - C\cdot(a^2-D)$$

$$A = a^2 - \frac{2a^2}{a^2(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2}\cdot\left(\frac{\varepsilon+1}{}a^2 - \frac{(1-\varepsilon)\cdot b^2}{\varepsilon+1}\right)$$

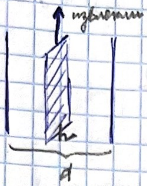
$$A = a^2 - \frac{2a^2\cdot\left(a^2(\varepsilon+1) - (1-\varepsilon)\cdot b^2\right)}{\left(a^2\cdot(\varepsilon+1)^2 - b^2(\varepsilon-1)^2\right)\cdot(\varepsilon+1)}$$

Поле $\underline{E_3 = B\cdot G}$ внутри полости цилиндра оказыв. однородным. Поэтому поле в полости цилиндра:

$$E_3 = B\cdot G = G\cdot\frac{4\varepsilon a^2}{a^2\cdot(\varepsilon+1)^2 - b^2\cdot(\varepsilon-1)^2} = G\cdot\frac{4\varepsilon\cdot\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}\left((\varepsilon+1)^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot(\varepsilon-1)^2\right)}$$

$$E_3 = G\cdot\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot(\varepsilon-1)^2}$$

Иродов №2.150: Внутри плоского конденсатора наход. параллельная обкладкам пластина, толщина которой составляет $\eta = 0,6$ расстояния между обкладками. Конденсатор сначала подключили к источнику пост. напряжения $U = 200$ В, затем отключили и после этого медленно извлекли пластину из зазора. Емкость конденсатора в отсутствие пластины $C = 20$ нФ. Найти работу, соверш. против электр. сил при извлечении пластины, если пластина: а) металлическая; б) стеклянная



Пусть толщина пластины: $h = d \cdot \eta$

$$A = \Delta W$$

изменение энергии, запасенной в конденсаторе

Работа, соверш. внеш. силами, идёт на увелич. Енот. электр. системы, т.е. энергии отключенного от источника напряжения конденсатора.

При отключении от источника напряжения, на обкладках конденс. сохраняется заряд q: $q = const$

Значит, $W = \dfrac{q^2}{2C}$

При вытаскивании пластины ёмкость конденс. уменьшается, а запасенная в ней энергия увеличивается.

а) Начал. ёмкость конденсатора: $C' = \dfrac{\varepsilon^{1} \varepsilon_0 \cdot S}{d-h} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d - d\eta} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot S}{d(1-\eta)}$ площадь обкладок

Ёмкость конденсатора после удаления пластины: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} = 20$ нФ   расст. между обкладками

Тогда, $\Delta W = \dfrac{q^2}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{C'}\right) = \dfrac{q^2}{2} \cdot \left(\dfrac{d}{\varepsilon_0 S} - \dfrac{d(1-\eta)}{\varepsilon_0 \cdot S}\right) = \dfrac{q^2}{2} \cdot \dfrac{d\eta}{\varepsilon_0 \cdot S}$

Также $q = C' \cdot U$ $\Rightarrow$ $A = \Delta W = \dfrac{C'^2 U^2 \cdot d \cdot \eta}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot S} = \dfrac{\cancel{\varepsilon_0^2} \varepsilon_0 \cdot S \cdot \cancel{S} \cdot U^2 \cdot \cancel{d} \cdot \eta}{C = d \cdot \cancel{d} \cdot 2 \cdot \cancel{\varepsilon_0} \cdot \cancel{S} (1-\eta)^2} = \dfrac{CU^2 \cdot \eta}{2 \cdot (1-\eta)^2}$

$$A = \frac{C \cdot U^2 \cdot \eta}{2 \cdot (1-\eta)^2} = \frac{20 \cdot 10^{-9} \cdot 200^2 \cdot 0,6}{2 \cdot (1-0,6)^2} = 0,0015 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}$$

б) Рассмотрим ёмкость плоского конденсатора с 2-мя диэлектр. слоями (слой толщиной d_1 с ε_1 и $d_2 = d - d_1$ с ε_2)

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + \dfrac{d_2}{\varepsilon}}$$

$1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$

конденс. $d_1 = (1-\eta) \cdot d$, а пластина $d_2 = \eta d$

Тогда начал. ёмкость конденсатора: $C' = \dfrac{\varepsilon_0 S}{(1-\eta) \cdot d + \dfrac{\eta d}{\varepsilon}} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{((1-\eta) + \frac{\eta}{\varepsilon})d} = \dfrac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{(\varepsilon(1-\eta)+\eta)d}$

$$\Delta W = \frac{q^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C'}\right)$$

$$\Delta W = \frac{q^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{(\varepsilon \cdot (1-\eta) + \eta)\, d}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}\right) = \frac{q^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C} \cdot (\varepsilon(1-\eta)+\eta)\right)$$

$q = C' \cdot U$ $\Rightarrow$ $A = \dfrac{\varepsilon^2 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot S^2 \cdot U^2}{2(\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2 \cdot d^2} \cdot \left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{C} \cdot (\varepsilon(1-\eta)+\eta)\right) =$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon^2} \varepsilon_0^2 S^2 \cdot U^2}{2 \cdot (\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2 d^2} \cdot \frac{d}{\cancel{\varepsilon} \cdot \varepsilon_0 S} - \frac{\varepsilon^2 \varepsilon_0^2 S^2 \cdot U^2}{2(\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2 d^2} \cdot \frac{d(\varepsilon(1-\eta)+\eta)}{\cancel{\varepsilon} \cdot \varepsilon_0 S} =$$

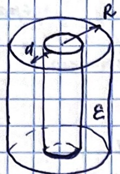
$$= \frac{CU^2}{2(\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2} - \frac{CU^2 \cdot (\varepsilon(1-\eta)+\eta)}{2(\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2} =$$

$$= \frac{CU^2}{2 \cdot (\varepsilon(1-\eta)+\eta)^2} \cdot (1 - (\varepsilon(1-\eta)+\eta)) = \frac{CU^2 \cdot \eta \varepsilon \cdot (\varepsilon - 1)}{2(\varepsilon - \eta(\varepsilon-1))^2} = 0,8 \text{ мДж}$$

$\varepsilon - \varepsilon\eta + \eta = \varepsilon - \eta(\varepsilon - 1)$

18.05.2024г.

Иродов 4.9 (из „электромагнетизм")



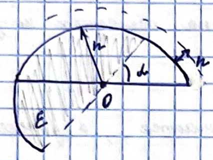
$d \ll R$

$$E = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2}\cdot\left(\frac{\varepsilon\,\varepsilon_0 x}{d}\cdot 2\pi R + \frac{\varepsilon_0\cdot(\ell - x)}{d}\,2\pi R\right)$$

$$F = \frac{dE}{dx} = \frac{U^2\,\varepsilon\cdot\varepsilon_0}{d}\,\pi R + \frac{U^2}{d}\cdot(-1)\cdot\varepsilon_0\,\pi R =$$

$$= \frac{U^2\pi R}{d}\cdot\varepsilon_0\cdot(\varepsilon - 1)$$

Иродов №4.10



$$\vec{M} = [\vec{r}\times\vec{F}]$$

Найдём ёмкость - ?

Разобьем на части: $C = \dfrac{\varepsilon_0}{h}\left(\underset{\text{без диэлектр.}}{S_1} + \varepsilon\cdot S_2\right) =$

$$= \frac{\varepsilon_0}{h}\left(\frac{\pi R^2}{2\pi}\cdot\alpha + \frac{\pi R^2}{2\pi}(\pi-\alpha)\,\varepsilon\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{h}\left(\frac{R^2}{2}\alpha + \frac{R^2}{2}(\pi-\alpha)\,\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon_0 R^2}{2h}\left(\alpha + (\pi-\alpha)\,\varepsilon\right)$$

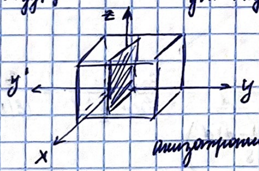
$$E = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 R^2}{4h}\left(\alpha + (\pi-\alpha)\,\varepsilon\right)U^2$$

$$\frac{dE}{d\alpha} = U^2\cdot\frac{\varepsilon_0 R^2}{4h}\,\underbrace{(1-\varepsilon)}_{<0\ -\ \text{втягивание}}$$

$$D = \sum_\ell \varepsilon_{k\ell}\,E_\ell$$

индукция

два индекса, если среда не изотропная



$\varepsilon_{k\ell}$ - ?

$$\varepsilon_{k\ell} = M^T\,\varepsilon_{k\ell}\cdot M$$

анизатропия

матрица преобр. для кристалла

$$M = \begin{pmatrix} e'_x\cdot e_x & e'_x e_y & e'_x e_z \\ e'_y\cdot e_x & e'_y e_y & e'_y e_z \\ e'_z\cdot e_x & e'_z e_y & e'_z\cdot e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^T$$

$x \to x$
$z \to z$
$y \to -y$

$$\varepsilon_{k\ell} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

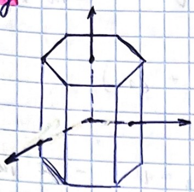
$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12}\to 0 & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21}\to 0 & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23}\to 0 \\ \varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32}\to 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{k\ell} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Д/З

шестиугольная призма

Найти элементы симметрии при заданном векторе поляризации



поляризация пойдёт обратно

Пьезоэффект: $\boxed{D_i = 4\pi \cdot \gamma_{ikl} \cdot \sigma_{kl}}$

σ_{kl} — тензор напряжений

γ_{ikl} — тензор пьезоэффекта

$\gamma_{123}\ ;\ \gamma_{231}\ ;\ \gamma_{321} = \gamma^*$ гидростатическое сжатие

Найти $D_i \neq 0$ (компоненты вектора индукции D, отличные от нуля)

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}=1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{i11} \cdot \sigma_{11} + \gamma_{i12} \cdot \sigma_{12} + \gamma_{i13} \cdot \sigma_{13} + \gamma_{i21} \cdot \sigma_{21} + \gamma_{i22} \cdot \sigma_{22} +$$

$$+ \gamma_{i23} \cdot \sigma_{23} + \gamma_{i31} \cdot \sigma_{31} + \gamma_{i32} \cdot \sigma_{32} + \gamma_{i33} \cdot \sigma_{33}) = 4\pi \cdot (\gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \gamma_{i33}) = 0$$

из-за неправильн. давления и св-ва материала

Д/З подобрать σ_{ik} при тех же γ^*, чтобы $D_i \neq 0$.

Домашняя работа №6

Гучевой Александр
3 курс 4 группа

N1

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\gamma_{123}, \gamma_{231}, \gamma_{321}$

$D_i = 4\pi \cdot \gamma_{ikl} \cdot \sigma_{kl}$

$D_i \neq 0 \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{123} \cdot \sigma_{23} + \gamma_{231} \cdot \sigma_{31} + \gamma_{321} \cdot \sigma_{21}) \neq 0$

$\Downarrow$

1 вариант: $\sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{21} \neq 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{123} + \gamma_{231} + \gamma_{321}) \neq 0$$

2 вариант: $\sigma_{23} = \sigma_{31} \neq 0$, $\sigma_{21} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{123} + \gamma_{231}) \neq 0$$

3 вариант: $\sigma_{23} = \sigma_{21} \neq 0$, $\sigma_{31} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{321} + \gamma_{123})$$

4 вариант: $\sigma_{31} = \sigma_{21} \neq 0$, $\sigma_{23} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{321} + \gamma_{231})$$

5 вариант: $\sigma_{23} \neq 0$, $\sigma_{21} = \sigma_{31} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot \gamma_{123}$$

6 вариант: $\sigma_{31} \neq 0$, $\sigma_{21} = \sigma_{23} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot \gamma_{231}$$

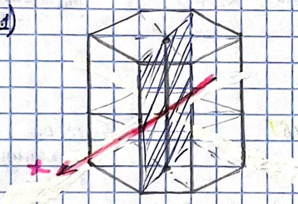
7 вариант: $\sigma_{21} \neq 0$, $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$

$$\sigma_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_i = 4\pi \cdot \gamma_{321}$$

σ_{kl} — симметричен

N2 Оси симметрии правильной n-угольной призмы, яв-ся и осей симметрии сечения этой призмы, проходящего через середины боковых рёбер.

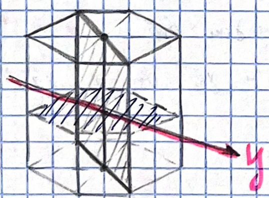
1)



по x: Ось, соединяющая центры основания и плоскость

2 элемента симметрии

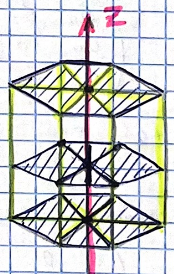
2)



по y: Ось, соединяющая центры основания и две плоскости.

3 элемента симметрии

3)



по z: Ось, соед. центры основания и 1 + 6 осей, проход. через боковые ребра и основания.

3 плоскости + 3 плоскости

13 элементов симметрии

$$D_i = 4\pi \cdot \gamma_{ijk} \cdot \sigma_{jk}$$ из д/з

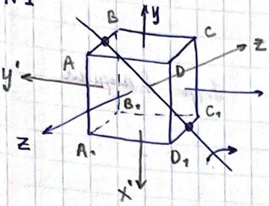
25.03.2024

$$D_i = 4\pi \cdot (\gamma_{i23}\,\sigma_{23} + \gamma_{i31}\cdot\sigma_{31} + \gamma_{i12}\cdot\sigma_{12})$$

$$D_1 = 4\pi\cdot\gamma_{123}\,\sigma_{23}$$

$$D_2 = 4\pi\cdot\gamma_{231}\cdot\sigma_{31}$$

N 1



ε_{ij} – ? (инвариантен)

поворот на 180°

Переход вершин:

$A \to B$
$A_1 \to C$
$B_1 \to D$
$D_1 \to C_1$

$x: \ (CDD_1) \to (A_1B_1C_1)$
$y: \ (ABC) \to (BAA_1)$
$z: \ (A_1AD) \to (CBB_1)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

т.к. x' противопол. y

y' противоп. x

z' противоп. z

$\varepsilon_{ij} = M^T\cdot\varepsilon_{ij}\cdot M$, $M^T = M$ $\quad \varepsilon_{ij}$ – симметричен

1) $$M^T\cdot\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

2) $$M^T\cdot\varepsilon_{ij}\cdot M = \begin{pmatrix} -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\varepsilon_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Приравниваем исход. матрицу к полученной:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} \end{cases} \Rightarrow$$

Ответ: $$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Д/з: ε_{ij} – ? при кубической симметрии (на 90° вокруг по 0x; потом к результату на 90° вокруг 0y) приравниваем к промежут. результ. конечный результат к промежут. приравниваем

N 2.248 Иродов

$\vec j(r)$ – ? (плотность тока)

$B = B\cdot r$

$\oint \vec B\, d\vec L = \frac{4\pi}{c} I$

$\oint \vec H d\vec r = \frac{4\pi}{c} I$

$\oint \vec B d\vec r = \frac{4\pi}{c}\cdot(I + I')$

$\oint \vec J d\vec r = \frac{1}{c}\cdot I'$

$\vec J = \vec M$ → намагниченность

$\vec B = \mu\cdot\vec H$ $\qquad \mu = 1 + 4\pi\varkappa$

$\vec J = \varkappa\vec H$ $\qquad \vec H = \vec B - 4\pi\vec M$

$B_{1n} = B_{2n}$ $\qquad H_{1\tau} = H_{2\tau}$

$B \cdot r^{\alpha} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I$ — интегрируем по контуру (в магнитных)
окружность

$$I = \frac{b \cdot r^{\alpha+1} \cdot c}{2}$$

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{dI}{2\pi r\, dr} = \frac{d(b \cdot r^{\alpha+1} \cdot c)}{2 \cdot 2\pi r\, dr} = \frac{1}{4\pi r} \cdot \left(b \cdot r^{\alpha} \cdot c \cdot (\alpha+1)\right) =$$

$$= \frac{b \cdot r^{\alpha-1} \cdot c \cdot (\alpha+1)}{4\pi}$$

К/р 8 апреля

N 138 (Алексеев)

а) $\vec{H} = \vec{H_0}$

Ур-ние Максвелла без источников: 1) $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{I}_{=0} = 0$

Нужно доказать, что это возможно.

2) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

□ Т.к. в вакууме $\mu = 1 \Rightarrow \vec{B} = \vec{H}$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_{0x} & H_{0y} & H_{0z} \end{vmatrix} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{dB_{0x}^{=H_{0x}}}{dx} + \frac{dB_{0y}^{=H_{0y}}}{dy} + \frac{dB_{0z}^{=H_{0z}}}{dz} = 0$$ → производные $= 0$, т.к. $H_0 = const$ ■

б) $\vec{H} = b \cdot (z \cdot \vec{e_x} + x \cdot \vec{e_y} + y \cdot \vec{e_z})$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$\vec{B} = \vec{H}$

□ $$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \vec{e_x} \cdot (b - 0) + \vec{e_y} \cdot (b - 0) + \vec{e_z} \cdot (b - 0) =$$

$$= b \cdot (\vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}) \neq 0$$ ■
не может быть

N 139 (Алексеев)

$j = j_0 \cdot e^{-\alpha r}$ — в сферич. системе коорд.

$\rho(t) = const$ — объемная плотность

□ $\frac{d\rho}{dt}^{=0} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, т.е. $\operatorname{div} \vec{j} = 0$

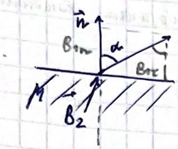
в сфер. системе: $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 A_r \quad \ldots)$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot j_0 \cdot e^{-\alpha r}) = \frac{j_0}{r^2} \cdot \left(2r \cdot e^{-\alpha r} + r^2 \cdot (-\alpha) \cdot e^{-\alpha r}\right) =$$

$$= \frac{j_0}{r} \cdot e^{-\alpha r} \cdot (2 - \alpha r) \neq 0$$ не может быть ■

N 2.293 Иродов

$\vec{B}_2$ - ?



Гранич. условия: $\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$

$B_{1n} = B_1 \cdot \cos\alpha$

$B_{1\tau} = B_1 \cdot \sin\alpha$

$\underline{B_{2n} = B_1 \cdot \cos\alpha = B_{1n}}$

$\underline{B_2\tau = \mu \cdot B_{1\tau} = \mu \cdot B_1 \cdot \sin\alpha}$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$: $B_{1\tau} = H_{1\tau}$

$B_{2\tau} = \mu \cdot H_{2\tau}$

$\Downarrow$

$B_{1\tau} = \frac{B_{2\tau}}{\mu}$

$$|B_2| = \sqrt{B_1^2 \cdot \cos^2(\alpha) + B_1^2 \cdot \sin^2(\alpha)\, \mu^2}$$

Д/З Алексеев N 138 (в)

Иродов N 2.247, N 2.294

Домашняя работа N 7 Гусевой Александры

3 курс 4 группа

N 138 (в) Алексеев: Можно ли подобрать такое распределение электрич. тока снаружи полой области, чтобы внутри неё напряжённость магнит. поля имела вид: в) $H = \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$, где $\vec{m}$ не зависит от коорд. и времени, а точка с $\vec{r} = 0$ находится вне полой области?

1) $\text{rot}\,\vec{H} = 0$

2) $\text{div}\,\vec{B} = 0$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

□

Иродов 2.247 Внутри длинного прямого провода круглого сечения имеется длинная круглая цилиндр. полость, ось которой // оси провода и смещена относит. последней на расстояние $\vec{l}$. По проводу течёт пост. ток пл-ти $\vec{j}$. Найти индукцию магнит. поля внутри полости, пренебрегая влиянием вещ-ва провода.

$$\vec{B} = \underbrace{\vec{B_0}}_{\text{сплошной проводник}} - \vec{B'} \leftarrow \text{цилиндр. полость}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\, d\vec{S}}$$

$$B_0 \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot \pi r^2 \cdot j$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot r \cdot j}{2}$$

В векторном виде: $\vec{B_0} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot [\vec{j}\,\vec{r}]$

Аналогично для $\vec{B'}$: $\vec{B'} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot [\vec{j}\,\vec{r'}]$

Тогда $\vec{B} = \vec{B_0} - \vec{B'} = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 [\vec{j}, \vec{r} - \vec{r'}] = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot [\vec{j}, \vec{l}]$

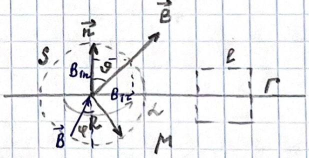
поле в полости однородное

Иродов 2.294 Индукция магнит. поле в вакууме вблизи плоской поверхности магнетика равна B, и вектор B_0 составляет угол ϑ с нормалью n к поверхности. Магнит. проницаемость магнетика μ. Найти:

а) поток $\vec{H}$ через поверх. сферы S радиуса R, центр которого лежит на поверх. магнетика;

б) циркуляцию $\vec{B}$ по квадр. контуру Г со стороной l, расположенному, как показано на рисунке.

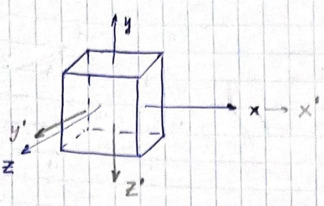
а) Граничные условия: $\begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1\tau} = H_{2\tau} \end{cases}$



(1) $B_{1n} = B \cdot \cos\vartheta$ $\quad B_{2n} = B \cdot \cos\varphi$

$B_{1\tau} = B \cdot \sin\vartheta$ $\quad B_{2\tau} = B \cdot \sin\varphi$

$B = \mu H \Rightarrow H = \frac{B}{\mu}$



1) поворот на 90° вокруг по OX :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_{ij} = M^T \cdot \varepsilon_{ij} \cdot M$, ε_{ij} симметричен

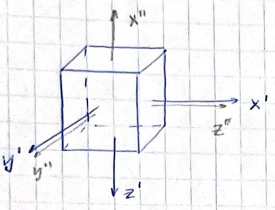
$$\varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{13} & \varepsilon_{33} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

Приравниваем исход. матрицу к полученной:

$$\begin{cases} \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} \end{cases} \Rightarrow \quad \varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$$

2) поворот на 90° вокруг по Oy



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{12} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & -\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

Приравниваем к промежуточной матрице ε'_{ij} :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{12} \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} \\ -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

ост. 2 элемента : ε_{11} и ε_{12}